Введение в математическую логику
(осень 2018)

В.Б. Шехтман

Лекция 5

Корректность исчисления высказываний для булевых алгебр (окончание)

Продолжаем доказательство теоремы:

Теорема 4.5. *Если* $\vdash_{CL} A$, *то* $\mathcal{B} \vDash A$ *для любой булевой алгебры* $\mathcal{B}$.

Доказательство

Остается рассмотреть случаи, когда A — аксиома. Нам понадобится лемма о булевых алгебрах.

Лемма 5.1. *В любой булевой алгебре*

(1) $x \leq x \sqcup y,\ y \leq x \sqcup y$;

(2) если $x \leq z$ *и* $y \leq z$, *то* $x \sqcup y \leq z$;

(3) если $x \leq x'$ *и* $y \leq y'$, *то* $x \sqcup y \leq x' \sqcup y'$.

Доказательство (1) $x \sqcap (x \sqcup y) = x$ — поглощение и коммутативность; аналогично получаем $y \sqcap (x \sqcup y) = y$.

(2) Если $x \sqcap z = x,\ y \sqcap z = y$, то по дистрибутивности

$$(x \sqcup y) \sqcap z = (x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z) = x \sqcup y.$$

(3) Пусть $x \leq x'$ и $y \leq y'$. Тогда из (1) получаем

$$x \leq x' \leq x' \sqcup y',\ y \leq y' \leq x' \sqcup y'.$$

Теперь, применив (2), имеем:

$$x \sqcup y \leq x' \sqcup y'.$$

■

Докажем теперь общезначимость аксиом CL в произвольной булевой алгебре $\mathcal{B}$.

<u>Аксиома 1</u> Выберем оценку f в $\mathcal{B}$; пусть $f(A) = a$, $f(B) = b$. Нам надо доказать

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow a) = \mathbf{1}.$$

По лемме 3.4 это равносильно

$$a \leq b \Rightarrow a = -b \sqcup a.$$

Теперь можно применить лемму 5.1.

Общезначимость аксиом 3, 4, 6, 7, 10 проверяется легко (упражнение). Рассмотрим аксиомы 2, 8, 9.

<u>Аксиома 2</u> Пусть дана оценка f в $\mathcal{B}$, $f(A) = a$, $f(B) = b$, $f(C) = c$. Надо доказать

$$(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)) = \mathbf{1}.$$

По лемме 3.4 это равносильно

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \leq (a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c),$$

т.е.

$$-a \sqcup (-b \sqcup c) \leq -(-a \sqcup b) \sqcup (-a \sqcup c),$$

или (применяя закон Де Моргана и ассоциативность)

$$-a \sqcup -b \sqcup c \leq (a \sqcap -b) \sqcup -a \sqcup c.$$

Благодаря почленному сложению неравенств (лемма 5.1 (3)), достаточно проверить

$$(*) \qquad -b \leq (a \sqcap -b) \sqcup -a.$$

А это получается так:

$$-b = \mathbf{1} \sqcap (-b) = (a \sqcup -a) \sqcap (-b) = (a \sqcap -b) \sqcup (-a \sqcap -b) \leq (a \sqcap -b) \sqcup (-a)$$

— опять по лемме 5.1.

<u>Аксиома 9</u> Надо доказать

$$(a \Rightarrow -b) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow -a) = \mathbf{1}.$$

Заметим, что

$$a \Rightarrow \mathbf{0} = -a \sqcup \mathbf{0} = -a.$$

Значит, надо проверить, что

$$(a \ominus (b \ominus \mathbf{0})) \ominus ((a \ominus b) \ominus (a \ominus \mathbf{0})) = \mathbf{1}.$$

Но это мы установили при проверке аксиомы 2: надо взять $c = \mathbf{0}$.

<u>Аксиома 8</u> Надо доказать

$$(a \ominus c) \ominus ((b \ominus c) \ominus ((a \sqcup b) \ominus c)) = \mathbf{1},$$

или

$$a \ominus c \leq (b \ominus c) \ominus ((a \sqcup b) \ominus c),$$

или

$$-a \sqcup c \leq -(-b \sqcup c) \sqcup -(a \sqcup b) \sqcup c,$$

или (если применить закон Де Моргана)

$$-a \sqcup c \leq (b \sqcap -c) \sqcup (-a \sqcap -b) \sqcup c.$$

По лемме 5.1 это сводится к

$$(\sharp) \qquad -a \leq (b \sqcap -c) \sqcup (-a \sqcap -b) \sqcup c.$$

Для доказательства $(\sharp)$ используем неравенства:

$$(**) \qquad -a \leq (-a \sqcap -b) \sqcup b,$$

$$(***) \qquad b \leq (b \sqcap -c) \sqcup c.$$

Каждое из них — это вариант неравенства (*) (см. выше). Теперь по лемме 5.1 получаем $(\sharp)$:

$$-a \leq (-a \sqcap -b) \sqcup b \leq (-a \sqcap -b) \sqcup (b \sqcap -c) \sqcup c.$$

■

Следствие 5.2. *CL непротиворечиво, т.е. нет такой формулы A, что $\vdash_{CL} A, \neg A$.*

Доказательство. Иначе обе формулы $A, \neg A$ окажутся тавтологиями. ■

Полнота исчисления высказываний

Теорема 5.3. *(Теорема о полноте CL)*
Все тавтологии выводимы в CL:

$$2 \vDash A \;\Rightarrow \vdash_{CL} A.$$

Доказательство Множество формул $\Gamma \subseteq Fm$ называется *противоречивым* (в CL), если $\Gamma \vdash A, \neg A$ для некоторой формулы A.

Лемма 5.4.

(1) $\Gamma \cup \{B\}$ *противоречиво* $\Leftrightarrow \Gamma \vdash \neg B$

(2) Если Γ *противоречиво, то* $\Gamma \vdash B$ *для всех формул* B*.*

Доказательство (леммы).
(1) ($\Leftarrow$) очевидно.
Докажем ($\Rightarrow$). Пусть $\Gamma, B \vdash A, \neg A$. Тогда по теореме дедукции

$$\Gamma \vdash B \to A,\; B \to \neg A.$$

С другой стороны,

$$B \to A,\; B \to \neg A \vdash \neg B.$$

Это получается из аксиомы 9, если заменить в ней A на B и наоборот и 2 раза применить MP. Тогда по транзитивности

$$\Gamma \vdash \neg B.$$

(2) Если Γ противоречиво, то и подавно $\Gamma \cup \{\neg B\}$ противоречиво. По (1) тогда $\Gamma \vdash \neg\neg B$. Добавив к этому выводу аксиому 10 $\neg\neg B \to B$ и применив MP, получаем $\Gamma \vdash B$. ■

Теорему 5.3 докажем от противного: предполагаем $\nvdash_{CL} A$ и доказываем $2 \nvDash A$.

Пусть Φ — множество всех подформул A и их отрицаний. Будем рассматривать различные $\Gamma \subseteq \Phi$.

Множество $\Gamma \subseteq \Phi$ назовем *максимально непротиворечивым* (или просто — *максимальным*), если оно непротиворечиво, а всякое его собственное расширение внутри Φ (т.е. Γ', такое что $\Gamma \subset \Gamma' \subseteq \Phi$) противоречиво.

Очевидно, что Φ противоречиво — например, потому, что $A, \neg A \in \Phi$.

Множество $\{\neg A\}$ непротиворечиво: иначе бы $\vdash \neg\neg A$ (по лемме 5.4(1)), и тогда $\vdash A$ — по аксиоме 10 и MP.

Лемма 5.5. *Любое непротиворечивое подмножество Φ содержится в каком-то максимальном.*

Доказательство Если $\Gamma \subseteq \Phi$ непротиворечиво и не максимально, то оно останется непротиворечивым при добавлении какой-то формулы из $\Phi \backslash \Gamma$. Расширим его, добавив эту формулу. Продолжаем процесс до тех пор, пока это возможно. Т.к. $\Phi \backslash \Gamma$ конечно, через конечное число шагов получится максимальное множество.[1] ■

Лемма 5.6. *Пусть Γ — максимальное множество. Тогда*

(0) $\Gamma \vdash B \Rightarrow B \in \Gamma$ *(для* $B \in \Phi$*);*

(1) $\neg B \in \Gamma \Leftrightarrow B \notin \Gamma$ *(для* $\neg B \in \Phi$*);*

(2) $(B \wedge C) \in \Gamma \Leftrightarrow (B \in \Gamma$ *и* $C \in \Gamma)$ *(для* $(B \wedge C) \in \Phi$*);*

(3) $(B \vee C) \in \Gamma \Leftrightarrow (B \in \Gamma$ *или* $C \in \Gamma)$ *(для* $(B \vee C) \in \Phi$*);*

(4) $(B \to C) \in \Gamma \Leftrightarrow (B \notin \Gamma$ *или* $C \in \Gamma)$ *(для* $(B \to C) \in \Phi$*).*

Доказательство (0) Доказываем от противного. Предположим, что $B \in \Phi$, $B \notin \Gamma$. Тогда $\Gamma \subset \Gamma \cup \{B\} \subseteq \Phi$, поэтому $\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво (т.к. Γ максимально). Тогда по лемме 5.4(1) $\Gamma \vdash \neg B$, и следовательно, $\Gamma \not\vdash B$ — иначе бы Γ было противоречиво.

(1) ($\Rightarrow$) очевидно, т.к. Γ непротиворечиво.

($\Leftarrow$) Сначала заметим, что если $\neg B \in \Phi$, то и $B \in \Phi$ как подформула A. Действительно, если $\neg B$ — отрицание подформулы A, то B — подформула; если же $\neg B$ — подформула A, то B — тоже подформула. Тогда из $B \notin \Gamma$ следует $\Gamma \vdash \neg B$ (как в доказательстве (0)). Отсюда $\neg B \in \Gamma$ — по (0).

(2) Нам дано, что $(B \wedge C) \in \Phi$. Тогда $(B \wedge C)$ — подформула Φ, поэтому и B, C — подформулы и лежат в Φ.

($\Rightarrow$) Пусть $(B \wedge C) \in \Gamma$. Тогда $\Gamma \vdash B, C$ (по аксиомам 3,4 и MP). Значит, $B, C \in \Gamma$ — по (0).

($\Leftarrow$) Пусть $B, C \in \Gamma$. Тогда $\Gamma \vdash B \wedge C$ (т.к. $B, C \vdash B \wedge C$ — см. пример 3 из лекции 4). Отсюда $(B \wedge C) \in \Gamma$ — по (0).

(3) Как и в случае (2), сначала заметим, что $B, C \in \Phi$.

[1] Это рассуждение (его можно провести точнее, в рамках формальной теории множеств) показывает, что всякое конечное частично упорядоченное множество имеет максимальный элемент. В нашем случае это множество всех непротиворечивых подмножеств Φ, содержащих Γ, упорядоченное по включению.

($\Leftarrow$) Если $B \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash B \vee C$ (по аксиоме 6 и MP), и тогда $(B \vee C) \in \Gamma$ — по (0). Если $C \in \Gamma$, рассуждаем аналогично (с аксиомой 7).

($\Rightarrow$) Доказываем от противного. Допустим $(B \vee C) \in \Gamma$, но $B, C \notin \Gamma$ Тогда $\neg B, \neg C \in \Gamma$ — по (1).

Вспомним теперь, что из противоречивого множества выводится любая формула (лемма 5.4(1)), в частности, $\perp$ ($= P_1 \wedge \neg P_1$ — см. лекцию 2). Поэтому $\neg B, B \vdash \perp$, откуда $\neg B \vdash B \to \perp$ — по теореме дедукции. Аналогично $\neg C \vdash C \to \perp$. В результате имеем:

$$\Gamma \vdash B \vee C, B \to \perp, C \to \perp.$$

Однако

$$B \vee C, B \to \perp, C \to \perp \vdash \perp$$

— это получится, если применить аксиому 8 и MP (дважды). По транзитивности, $\Gamma \vdash \perp$, и тогда Γ противоречиво: из $\perp$ выводятся $P_1, \neg P_1$.

(4) Как и в остальных случаях, заметим, что $B, C \in \Phi$.

($\Rightarrow$) Если $(B \to C), B \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash C$ по MP, и тогда $C \in \Gamma$ (по (0)).

($\Leftarrow$) Разбираем 2 случая.

Если $B \notin \Gamma$, то $\neg B \in \Gamma$ (1). Но $\neg B, B \vdash C$ (лемма 5.4(1)), откуда по теореме дедукции $\neg B \vdash B \to C$. Значит, $\Gamma \vdash B \to C$, и $(B \to C) \in \Gamma$ — по (0).

Если $C \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash B \to C$ по аксиоме 1 и MP, и опять $(B \to C) \in \Gamma$ — по (0). ■

Закончим теперь доказательство теоремы. Исходное непротиворечивое множество $\neg A$ расширим до максимального Γ (лемма 5.5). Возьмем оценку $f : Var \longrightarrow \{0, 1\}$ такую, что для всех переменных P_i из Φ

$$f(P_i) = 1 \Leftrightarrow P_i \in \Gamma.$$

На всех других переменных зададим f как угодно. Тогда справедливо следующее утверждение:

$$f(F) = 1 \Leftrightarrow F \in \Gamma$$

для всех $F \in \Phi$. Это утверждение доказывается индукцией по длине F.

- Если $F \in Var$, то утверждение верно по определению.
- Пусть $F = \neg B$, тогда $B \in \Phi$, и по предположению индукции,

$$f(B) = 1 \Leftrightarrow B \in \Gamma$$

Имеем:

$$f(F) = 1 \Leftrightarrow f(B) = 0 \Leftrightarrow B \notin \Gamma \Leftrightarrow F = \neg B \in \Gamma$$

по лемме 5.6.

- Пусть $F = (B \wedge C)$, тогда $B, C \in \Phi$, и по предположению индукции,

  $$f(B) = 1 \Leftrightarrow B \in \Gamma,\ \ f(C) = 1 \Leftrightarrow C \in \Gamma.$$

  Тогда

  $$f(F) = 1 \Leftrightarrow f(B) = f(C) = 1 \Leftrightarrow (B \in \Gamma \text{ и } C \in \Gamma) \Leftrightarrow F = (B \wedge C) \in \Gamma$$

  по лемме 5.6.

- Связки $\vee$, $\rightarrow$ рассматриваются аналогично.

Применив доказанное утверждение к $F = \neg A$, получаем $f(\neg A) = 1$, и следовательно, $f(A) = 0$. Итак, $2 \not\models A$. ■

Теорема 5.7. *Для любой пропозициональной формулы A и нетривиальной булевой алгебры $\mathcal{B}$ следующие утверждения эквивалентны.*

(1) $\vdash_{CL} A$,

(2) $\mathcal{B} \models A$,

(3) $2 \models A$.

Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2) — это теорема корректности 4.5, (2) $\Rightarrow$ (3) — теорема 4.1, а (3) $\Rightarrow$ (1) — теорема полноты 5.3. ■