Введение в математическую логику (осень 2018)

В.Б. Шехтман

Лекции 1-2

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Пропозициональные формулы

Высказывания — это предложения естественного языка. Естественные языки – предмет изучения других наук: лингвистики и филологии. В математической логике рассматриваются формальные языки. Простейший из них — *язык классической логики высказываний*, который задается так.

Определение 1 *Фиксируем счетное множество символов* пропозициональных переменных $Var = \{P_1, P_2, \ldots\}$. *Множество* пропозициональных формул Fm *строится из этих переменных, логических связок* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ *и скобок по индукции, как наименьше множество, удовлетворяющее условиям:*

(1) Если $A \in Var$, *то* $A \in Fm$.

(2) Если $A, B \in Fm$, *то* $(A \wedge B) \in Fm$.

(3) Если $A, B \in Fm$, *то* $(A \vee B) \in Fm$.

(4) Если $A, B \in Fm$, *то* $(A \rightarrow B) \in Fm$.

(5) Если $A \in Fm$, *то* $\neg A \in Fm$.

Таким образом, формулы представляют собой конечные последовательности знаков, т.е. некоторые *слова* в алфавите, состоящем из переменных, связок и скобок.[1]

[1]Этот алфавит бесконечен за счет множества Var. Можно обойтись и конечным алфавитом, если каждую переменную P_n изображать в виде слова $P1\ldots1$ (n раз).

Правила построения формул можно записать схематически так:

(1) P_i,

(2) $\dfrac{A, B}{(A \wedge B)}$,

(3) $\dfrac{A, B}{(A \vee B)}$,

(4) $\dfrac{A, B}{(A \rightarrow B)}$,

(5) $\dfrac{A}{\neg A}$.

Эти правила задают множество Fm с помощью "формальной грамматики". бычно формальные языки описываются правилами такого типа.

При записи формул используют дополнительные сокращения: внешние скобки опускаются; для экономии внутренних скобок устанавливается приоритет связок : $\wedge$ сильнее $\vee$, $\vee$ сильнее $\rightarrow$. И конечно, $\neg$ сильнее всех, но это и так видно из записи.

Еще одно сокращение:

$$(A \leftrightarrow B) := ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)).$$

Лемма 1.1 *(Лемма об однозначном анализе формул)*
Для любой формулы C выполнено ровно одно из условий:

(I) $C \in Var$,

(II) Существует единственная пара формул A, B, такая что $C = (A \wedge B)$,

(III) Существует единственная пара формул A, B, такая что $C = (A \vee B)$,

(IV) Существует единственная пара формул A, B, такая что $C = (A \rightarrow B)$,

(V) Существует единственная формула A, такая что $C = \neg A$.

Доказательство этой леммы мы пропустим; его можно найти, например, в [1], [5].

Подформулы

Говоря не совсем точно, подформула — это часть формулы, которая тоже является формулой. Точное определение можно дать двумя способами.

Определение 2 Подсловом *слова* $a_1 \dots a_n$ *(где* $a_1, \dots, a_n$ *— буквы) называется его часть, расположенная между какими-то двумя позициями, т.е. слово вида* $a_i \dots a_j$*, где* $i < j$.[2] Подформулой *формулы* A *называется любое ее подслово, которое является формулой.*

Другой вариант: определяем отношение $A \preceq B$ (A — подформула B) индукцией по длине B.

Определение 3 [3]

- *Если* $B \in Var$, *то* $A \preceq B \Leftrightarrow A = B$,
- *Если* $B = (C \wedge D)$, $(C \vee D)$ *или* $(C \to D)$ *для формул* C, D, *то*

$$A \preceq B \Leftrightarrow (A = B \text{ или } A \preceq C \text{ или } A \preceq D).$$

- *Если* $B = \neg C$, *то*

$$A \preceq B \Leftrightarrow (A = B \text{ или } A \preceq C.)$$

Задача Докажите, что два определения подформулы эквивалентны. (Более легкая часть: если $A \preceq B$, то A — подслово B и формула. Это делается индукцией по длине B.)

Оценки и значения формул

Определение 4 Оценкой (пропозициональных переменных) *называется любое отображение* $f : Var \longrightarrow \mathbb{B}$, *где* $\mathbb{B} = \{и, л\} = \{1, 0\}$.

Лемма 2.1 *(о продолжении оценок на формулы). Для любой оценки* $f : Var \longrightarrow \mathbb{B}$ *существует единственное отображение* $\overline{f} : Fm \longrightarrow \mathbb{B}$, *такое что для всех* $A, B \in Fm$

[2] Можно и дальше уточнить смысл такой записи: это слово $b_1 \dots b_{j-i}$, такое что $b_k = a_{i+k-1}$ для всех $k = 1, \dots, j - i$.

[3] Знаки $\preceq$, $\Leftrightarrow$, которые встречаются в этом определении, относятся к метаязыку; они сокращают русский текст.

(1) $\overline{f}(A) = f(A)$, *если* $A \in Var$,

(2) $\overline{f}(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow \overline{f}(A) = \overline{f}(B) = 1$,

(3) $\overline{f}(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow (\overline{f}(A) = 1$ *или* $\overline{f}(B) = 1)$,

(4) $\overline{f}(A \to B) = 1 \Leftrightarrow (\overline{f}(A) = 0$ *или* $\overline{f}(B) = 1)$,

(5) $\overline{f}(\neg A) = 1 \Leftrightarrow \overline{f}(A) = 0$.

Заметим, что условия (2)–(5) можно записать иначе:

(2) $\overline{f}(A \wedge B) = \min(\overline{f}(A), \overline{f}(B))$,

(3) $\overline{f}(A \vee B) = \max(\overline{f}(A), \overline{f}(B))$,

(4) $\overline{f}(A \to B) = \max(1 - \overline{f}(A), \overline{f}(B))$,

(5) $\overline{f}(\neg A) = 1 - \overline{f}(A)$.

Доказательство Определяем $\overline{f}(C)$ индукцией по длине C. Если C — переменная, то все ясно: $\overline{f}(C) = f(C)$.

Пусть $\overline{f}$ однозначно определена на всех формулах длины $< n$, $n > 1$, и рассмотрим формулу C длины n. По лемме 1.1, возможен ровно один из случаев (II)–(V). В каждом случае $\overline{f}$ однозначно доопределяется для C.

Например, в случае (II) $C = (A \wedge B)$ для единственной пары формул (A, B). Эти формулы A, B — длины $< n$, поэтому $\overline{f}(A), \overline{f}(B)$ однозначно определены по предположению индукции. Тогда $\overline{f}(C) = \min(\overline{f}(A), \overline{f}(B))$ тоже задается однозначно.

Аналогично рассуждаем для других случаев. ■

$\overline{f}(C)$ называется *значением формулы C при оценке f*; мы будем обозначать его также через $f(C)$.

Заметим еще, что условия (2)–(5) можно переписать так:

(2) $\overline{f}(A \wedge B) = \overline{f}(A) \mathbin{\circledwedge} \overline{f}(B)$,

(3) $\overline{f}(A \vee B) = \overline{f}(A) \mathbin{\circledvee} \overline{f}(B)$,

(4) $\overline{f}(A \to B) = \overline{f}(A) \mathbin{\circledrightarrow} \overline{f}(B)$,

(5) $\overline{f}(\neg A) = \ominus \overline{f}(A)$,

где $\circledvee$, $\circledwedge$, $\circledrightarrow$, $\ominus$ соответственно обозначают операции на множестве $\mathbb{B}$: max (“дизъюнкция"), min (“конъюнкция"), $\max(1 - x, y)$ (“импликация"), $1 - x$ “отрицание". При таких обозначениях видна некоторая аналогия между условиями (2)–(5) и определением гомоморфизма (или линейного отображения) в алгебре. Лемма 2.1 является аналогом следующего утверждения: любое отображение базиса векторного пространства в другое пространство однозначно продолжается до линейного отображения.

Лемма 2.2 *Значение формулы A при некоторой оценке зависит только от значения этой оценки на переменных из A: если оценки f, g совпадают на всех переменных, входящих в A, то $f(A) = g(A)$.*

Доказательство Это утверждение достаточно очевидно. Формально оно доказывается индукцией по длине A; например, если $A = B \vee C$, имеем:

$$f(A) = f(B) \circledvee f(C) = g(B) \circledvee g(C) = g(A)$$

(по определению значения формулы и предположению индукции). ■

Булевы функции

Определение 5 *Мы говорим, что формула A* построена из переменных *$P_1, \dots, P_n$, если в ней нет других переменных (но не обязательно все $P_1, \dots, P_n$ в ней встречаются).*

Если A построена из $P_1, \dots, P_n$, то используем запись $A(P_1, \dots, P_n)$.

Каждой формуле $A(P_1, \dots, P_n)$ отвечает *n-местная булева функция* φ_A^n (или короче, φ_A) из $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{B}$, которая задает значения A при всевозможных оценках. Таблица значений этой функции называется *таблицей истинности* формулы A.

Дадим точное определение φ_A^n.

Определение 6 *Для каждого двоичного вектора $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ построим оценку $f_{\overrightarrow{x}} : Var \longrightarrow \mathbb{B}$, такую что $f_{\overrightarrow{x}}(P_i) = x_i$ при $i \leq n$ и (например[4]) $f_{\overrightarrow{x}}(P_i) = 0$ при $i > n$.*

Положим $\varphi_A^n(\overrightarrow{x}) = f_{\overrightarrow{x}}(A)$.

Определение 7 *Формула называется* тавтологией*, если при любой оценке она принимает значение 1.*

Формула называется выполнимой*, если найдется оценка, при которой она принимает значение 1.*

Очевидно, что для любой формулы A:

- A — тавтология $\Leftrightarrow \neg A$ не выполнима.
- A выполнима $\Leftrightarrow \neg A$ — не тавтология.

Определение 8 *Формулы A и B называются* равносильными *(или* эквивалентными*), если при всех оценках их значения совпадают.*

[4] На самом деле неважно, каковы значения при $i > n$ (лемма 2.2).

Равносильность формул обозначается знаком $\sim$.[5]

Из леммы 2.2 сразу получаем, что формулы от одних и тех же переменных равносильны, если и только если (тождественно) совпадают их булевы функции:[6]

$$A(P_1, \dots, P_n) \sim B(P_1, \dots, P_n) \Leftrightarrow \varphi_A^n \equiv \varphi_B^n.$$

Также очевидно, что отношение равносильности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Обозначим через $\top$ формулу $P_1 \to P_1$, а через $\bot$ — формулу $P_1 \wedge \neg P_1$.

Лемма 2.3

(1) $A \sim B \Leftrightarrow ((A \to B) \wedge (B \to A))$ *— тавтология.*

(2) A*— тавтология* $\Leftrightarrow A \sim \top$.

Доказательство (1) Заметим, что

$$f(A) = f(B) \Leftrightarrow f((A \to B) \wedge (B \to A)) = 1.$$

Действительно,

$$f((A \to B) \wedge (B \to A)) = 1 \Leftrightarrow f(A \to B) = f(B \to A) = 1$$

Обе эти импликации истинны только в двух случаях: когда формулы A, B обе истинны или обе ложны, т.е. когда $f(A) = f(B)$.

(2) совсем очевидно: тавтологичность A как раз и означает, что A равносильна формуле $\top$, которая всегда истинна. ■

Приведем список некоторых равносильностей; проверка их предлагается в качестве упражнения.

Лемма 2.4

(1) $A \wedge B \sim B \wedge A,\ A \vee B \sim B \vee A$ *(коммутативность).*

(2) $(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C),\ (A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$ *(ассоциативность).*

(3) $A \wedge A \sim A,\ A \vee A \sim A$ *(идемпотентность).*

(4) $A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge C) \vee (B \wedge C),\ A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ *(дистрибутивность).*

(5) $A \vee (A \wedge B) \sim A,\ A \wedge (A \vee B) \sim A$ *(поглощение).*

[5] Это тоже символ метязыка.

[6] $\equiv$ обозначает совпадение функций при всех значениях аргумента. Часто пишут '$=$' вместо $\equiv$.

(6) $A \wedge \neg A \sim \bot,\ A \vee \bot \sim A,$
$A \vee \neg A \sim \top,\ A \wedge \top \sim A.$

(7) $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B,\ \neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$ *(законы Де Моргана).*

(8) $\neg\neg A \sim A$ *(закон двойного отрицания).*

(9) $A \to B \sim \neg A \vee B.$

Лемма 2.5 *Для любого вектора* $\overrightarrow{x} \in \mathbb{B}^n$ *можно построить* сигнальную формулу $A_{\overrightarrow{x}}(P_1, \dots, P_n)$, *для которой*

$$\varphi^n_{A_{\overrightarrow{x}}}(\overrightarrow{y}) = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}.$$

Иными словами, таблица истинности $A_{\overrightarrow{x}}$ содержит 1 только в строке $\overrightarrow{x}$.

Доказательство Для переменной P обозначим $P^1 = P$, $P^0 = \neg P$.
Очевидно, что для любой оценки f и $s \in \mathbb{B}$

$$f(P^s) = 1 \Leftrightarrow f(P) = s.$$

Теперь для $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n)$ можно взять

$$A_{\overrightarrow{x}} = P_1^{x_1} \wedge \ldots \wedge P_n^{x_n}.$$

В самом деле, для любой оценки f

$$f(A_{\overrightarrow{x}}) = 1 \Leftrightarrow (\text{так как } A_{\overrightarrow{x}} \text{ — конъюнкция})\ \forall i < n\ f(P_i^{x_i}) = 1$$

$$\Leftrightarrow (\text{по замечанию выше})\ \forall i < n\ f(P_i) = x_i.$$

Таким образом, в таблице истинности для $A_{\overrightarrow{x}}$ значение 1 появляется только в строке $\overrightarrow{x}$. ■

Теорема 2.6 *[Теорема о функциональной полноте] Любая булева функция отвечает формуле логики высказываний, точнее:*

для любой функции $\alpha : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ *существует формула* $A(P_1, \dots, P_n)$, *такая что* $\varphi_A \equiv \alpha$.

Доказательство Сначала рассмотрим случай, когда α не всюду равна 0. Тогда положим

$$A = \bigvee \{A_{\overrightarrow{x}} \mid \alpha(\overrightarrow{x}) = 1\}.$$

Это означает дизъюнкцию нескольких формул вида $A_{\overrightarrow{x}}$ — по всем векторам $\overrightarrow{x}$, на которых функция α равна 1 (дизъюнкция одной формулы — это сама формула).

Докажем, что $\varphi_A \equiv \alpha$. Действительно,

$$\varphi_A(\overrightarrow{y}) = 1 \Leftrightarrow f_{\overrightarrow{y}}(A) = 1$$

по определению функции φ_A (определение 6). Но A — это дизъюнкция формул вида $A_{\overrightarrow{x}}$, поэтому

$$f_{\overrightarrow{y}}(A) = 1 \Leftrightarrow \exists \overrightarrow{x}(\alpha(\overrightarrow{x}) = 1 \text{ и } f_{\overrightarrow{y}}(A_{\overrightarrow{x}}) = 1).$$

По лемме 2.5,

$$f_{\overrightarrow{y}}(A_{\overrightarrow{x}}) = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}.$$

Получаем:

$$\varphi_A(\overrightarrow{y}) = 1 \Leftrightarrow \exists \overrightarrow{x}(\alpha(\overrightarrow{x}) = 1 \text{ и } \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}) \Leftrightarrow \alpha(\overrightarrow{y}) = 1.$$

Таким образом, функции φ_A и α принимают значение 1 в одних и тех же точках. Во всех остальных точках значение равно 0. Следовательно, $\varphi_A \equiv \alpha$.

Если же $\alpha \equiv 0$, то можно использовать формулу $\perp$. Она ложна при всех оценках, а потому $\varphi_\perp \equiv \alpha$. ■

Список литературы

[1] Н.К. Верещагин, А.Х. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов (часть 2), 2012, Изд. МЦНМО, http://www.mccme.ru.

[2] В.А. Успенский, Н.К. Верещагин, В.Е. Плиско. Вводный курс математической логики. Издательство МГУ. М., 1991 и 1997. Физматлит, 2002.

[3] Э. Мендельсон. Введение в математическую логику. М.,1984.

[4] А.Н.Колмогоров, А.Г.Драгалин. Математическая логика. Серия "Классический университетский учебник 2005.

[5] В.Н. Крупский, В. Е. Плиско. Математическая логика и теория алгоритмов, Академия, 2013.

[6] С.К. Клини. Математическая логика. М., Мир, 1973.

[7] W. Rautenberg. A concise introduction to mathematical logic. Springer, 2006.