Программа курса

Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

(2016/2017 уч. год)

1. Предмет математической логики и теории алгоритмов.
   Проблема обоснования математики. Исследование непротиворечивости и полноты аксиоматических теорий. Алгоритмические проблемы в математике.

Логика высказываний

2. Пропозициональные формулы. Лемма об однозначном анализе формул (без док.) Подформулы.
3. Двузначные оценки пропозициональных переменных. Продолжение оценок на формулы. Тавтологии и выполнимые формулы.
4. Булевы функции, отвечающие формулам. Таблицы истинности формул. Равносильные формулы.
5. Примеры равносильных формул.
6. Сигнальные формулы. Теорема о функциональной полноте для булевых финкций.
7. Элементарные конъюнкции. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Теорема существования и единственности СДНФ.
8. Альтернативное доказательство существования СДНФ - преобразованием формул.
9. Двойственность. Теорема существования и единственности СКНФ (без док.).
10. Булевы алгебры. Булева алгебра подмножеств.
11. Оценки в булевой алгебре. Продолжение оценок на формулы. Равносильность и общезначимость формул в булевой алгебре.
12. Теорема о совпадении множества общезначимых формул для всех нетривиальных булевых алгебр.
13. Исчисление высказываний (CL). Выводы (формальные доказательства) и теоремы CL. (Мета)теорема корректности.
14. Вывод формулы $A \to A$. Вывод из гипотез. Теорема о дедукции для CL.
15. Свойства отношения выводимости. Допустимые правила. Примеры допустимых правил.
16. Равносильность формул в CL. Свойства отношения равносильности.
17. Синтаксический вариант теоремы об СДНФ (план доказательства).
18. Теорема о семантической полноте CL.
19. Связь выводимости из гипотез с выводимостью в CL.
20. Равносильность выводимости из гипотез и логического (семантического) следования.

Логика предикатов

21. Сигнатура. Термы, атомарные формулы, формулы. Лемма об однозначном анализе термов и формул (без док.).
22. Модель данной сигнатуры. Замкнутые термы. Определение значений замкнутых термов в модели; его корректность.
23. Замкнутые формулы. Определение значений замкнутых атомарных формул в модели; его корректность.
24. Расширенная сигнатура модели. Оцененные термы и формулы. Определение значений оцененных термов и формул в модели; его корректность.
25. Истинность замкнутой формулы в модели. Выполнимость и общезначимость замкнутых формул.
26. Теория первого порядка. Модель теории. Выполнимые (совместные) теории.
27. Чистая теория равенства Eq. Нормальные модели.
28. Отношение логического следования для теорий 1-го порядка и замкнутых формул.
29. Эквивалентные теории. Элементарная теория модели. Элементарно эквивалентные

модели.

30. Полные теории. Неполнота теории Eq. Формулы, ограничивающие мощность нормальных моделей.
31. Равносильные условия полноты: элементарная эквивалентность всех моделей; эквивалентность всех выполнимых расширений.
32. Теория групп. Примеры ее полных и неполных расширений.
33. Изоморфизм и изоморфность моделей.
34. Преобразование значений оцененных термов при изоморфизме моделей.
35. Преобразование значений оцененных формул при изоморфизме моделей.
36. Элементарная эквивалентность изоморфных моделей.
37. Определимые в модели предикаты и отношения; их инвариантность при автоморфизме.
38. Стандартные теории равенства. Теорема о нормализации.
39. Сильно категоричные теории с равенством. Полнота сильно категоричной теории. Примеры сильно категоричных теорий.
40. Сильная категоричность элементарной теории конечной модели (доказательство для конечной сигнатуры без функциональных символов). Следствие: модель, элементрано эквивалентная конечной модели M, изоморфна M.
41. Пример теории: аффинная геометрия плоскости. Ее конечные модели; аксиома Дезарга. Перпендикулярность прямых не определима в аффинной плоскости $\mathbf{R}^2$.
42. Универсальное замыкание формулы; условие истинности для него в модели.
43. Определение общезначимости и равносильности для незамкнутых формул. Примеры равносильных формул.
44. Предваренная нормальная форма. Лемма о равносильности любой формулы формуле с тесными отрицаниями. Теорема о приведении к предваренной нормальной форме.
45. Исчисление предикатов (PC). Вывод (доказательство); теоремы; вывод из гипотез; допустимые правила. Примеры теорем и допустимых правил; правила Бернайса.
46. Теорема о дедукции для PC.
47. Связь выводимости из гипотез с выводимостью в PC.
48. Теорема корректности для теорий 1-го порядка и для PC.
49. Исчисление предикатов с равенством. Теорема корректности для теорий с равенством и нормальных моделей.
50. Противоречивые теории: выводимость любой формулы; невыполнимость.
51. Примеры арифметических теорий: арифметика Робинсона и арифметика Пеано.
52. «Наивная теория множеств»; ее противоречивость (парадокс Рассела).
53. Теория множеств Цермело — Френкеля (ZF). Неупорядоченные и упорядоченные пары. Объединение двух множеств.
54. Схема аксиом выделения. Классы, собственные классы. Универсальный класс V — собственный.
55. Аксиома бесконечности. Множество натуральных чисел ω.
56. Прямое произведение двух множеств. Функции; область определения и множество значений. Инъекция, сюръекция, биекция.
57. Равномощность и вложимость множеств. Теорема Кантора — Бернштейна. Теорема Кантора о мощности множества $\mathcal{P}(x)$.
58. Аксиома выбора(AC). Вполне упорядоченные множества.Эквивалентные формулировки: теорема Цермело и лемма Цорна. Из теоремы Цермело следует AC. Сравнимость множеств по мощности (без док.).
59. Конечные множества, принцип Дирихле (без док.). Счетные множества. Подмножество счетного множества конечно или счетно.
60. Вложимость ω во всякое бесконечное множество (с помощью AC — план доказательства).
61. Счетность $\omega \times \omega$, ω^n. Объединение счетного множества счетных множеств счетно.

Счетность множества всех слов в конечном алфавите.

62. Теорема Гёделя о полноте. Выполнимость непротиворечивой формулы.
63. Теорема Гёделя — Мальцева о компактности. Выполнимость непротиворечивой теории.
64. Связь логического следования и выводимости; то же для теорий с равенством и нормальных моделей.
65. Существование моделей неограниченной мощности для теории с равенством, имеющей бесконечную (нормальную) модель.
66. Подмодель. Элементарная подмодель. Теорема Лёвенгейма — Сколема — Тарского о понижении мощности (без док.).
67. Элементарная диаграмма модели. Элементарное расширение как модель элементарной диаграммы. Теорема Лёвенгейма — Сколема — Тарского о повышении мощности (без док.). Существование счетных нестандартных моделей арифметики.
68. Категоричность теории в данной мощности. Признак полноты Лося — Вота.
69. Теория DLO плотных линечных порядков без первого и последнего элементов; ее ω-категоричность (теорема Кантора).

Алгоритмы

70. Понятия алгоритма и вычислимой функции.
71. Разрешимые множества слов в конечном алфавите. Булевы операции над разрешимыми множествами.
72. Полуразрешимые множества, их объединение и пересечение.
73. Примеры разрешимых множеств.
74. Теорема Поста (критерий разрешимости).
75. Перечислимые множества; эквивалентность перечислимости и полуразрешимости.
76. Образ и прообраз перечислимого множества, прообраз разрешимого множества относительно тотальной вычислимой функции.
77. Теорема об универсальной вычислимой функции (без док.).
78. Построение перечислимого неразрешимого подмножества **N**. Неразрешимость проблемы остановки.
79. Разрешимость множества формул и замкнутых формул в конечной сигнатуре (без док.).
80. Перечислимость множества теорем теории с разрешимым множеством аксиом.
81. Разрешимость множества теорем полной теории с разрешимым множеством аксиом.
82. Теорема Гёделя об определимости перечислимых множеств в стандартной модели арифметики (без док.). Первая теорема Гёделя о неполноте арифметических теорий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.К. Верещагин, А.Х. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов, части 1-3 http://www.mccme.ru.

2. В.А. Успенский, Н.К. Верещагин, В.Е. Плиско. Вводный курс математической логики. Издательство МГУ. М., 1991 и 1997. Физматлит, 2002.

4. Э. Мендельсон. Введение в математическую логику. М.,1984.

5. А.Н.Колмогоров, А.Г.Драгалин. Математическая логика. Серия "Классический университетский учебник", 2005.

6. В.Н. Крупский, В. Е. Плиско. Математическая логика и теория алгоритмов, Академия, 2013.

7. Дж. Булос, Р. Джеффри. Вычислимость и логика. М., Мир, 1994.

8. С.К. Клини. Математическая логика. М., Мир, 1973.
9. С.К. Клини. Введение в метаматематику. М., ИЛ, 1957.
10. W. Rautenberg. A concise introduction to mathematical logic. Springer, 2006.
11. У. Роджерс. Теория рекурсивных функции и эффективная вычислимость. М., 1972.