Введение в математическую логику (осень 2016)

В.Б. Шехтман

Лекция 12

Допустимость правила Бернайса

Лемма 12.1 *В исчислении предикатов допустимо правило Бернайса:*

$$\frac{A \to B}{A \to \forall x[x/a]B}$$

(где a не входит в A; x не входит в B).

Доказательство На прошлой лекции (пример 4) мы рассмотрели случай, когда x не входит еще и в A ("ослабленное правило Бернайса"). Если же x входит в A, его надо переименовать. Чтобы сделать это в исчислении предикатов, потребуется еще одна лемма.

Лемма 12.2 [1]

$$\vdash_{PC_\Omega} \forall y[y/a]A \to \forall x[x/a]A,$$

если x, y различны и не входят в A.

Доказательство

[1] Мы знаем, что формула $\forall y[y/a]A \to \forall x[x/a]A$ общезначима. Но сейчас надо ее доказать в специально придуманном исчислении предикатов, а это — другая задача, общезначимость здесь не поможет.

1. $\forall y[y/a]A \to A$. (II.1, см. пример 1 из лекции 11)
2. $\forall y[y/a]A \to \forall x[x/a]A$. (1, ослабленное правило Бернайса; в данном случае оно применимо, т.к. x не входит в A и не совпадает с y)

■

Теперь можно доказать лемму 12.1. Допустим, что $\vdash A \to B$, причем a не входит в A, x не входит в B. Выберем новую переменную y, не входящую ни в A, ни в B. По ослабленному правилу Бернайса, $\vdash A \to \forall y[y/a]B$.

По лемме 12.2, $\vdash \forall y[y/a]B \to \forall x[x/a]B$. И тогда, по правилу силлогизма, $\vdash A \to \forall x[x/a]B$. ■

Пример Допустимы *правила монотонности для кванторов*:

$$\frac{A \to B}{Ⴤx[x/a]A \to Ⴤx[x/a]B}$$

(где x не входит в A, B).

Рассмотрим только случай $Ⴤ = \forall$.

Допустим $\vdash A \to B$. Как мы уже знаем, $\vdash \forall x[x/a]A \to A$ (пример 1). Отсюда $\vdash \forall x[x/a]A \to B$ — по правилу силлогизма. Теперь, применяя правило Бернайса, получим $\vdash \forall x[x/a]A \to \forall x[x/a]B$.

Теорема о дедукции для PC

Теорема 12.3 *Пусть T — теория первого порядка в сигнатуре Ω, A, B — формулы в Ω, причем A — замкнутая. Тогда*

$$T, A \vdash B \Leftrightarrow T \vdash A \to B.$$

Доказательство Доказательство — почти такое же, как в исчислении высказываний (см. лекцию 5).

Утверждение ($\Leftarrow$) легко получается по (MP); оно верно и когда A — не замкнутая.

($\Rightarrow$) доказывается индукцией по длине вывода B в теории $T \cup \{A\}$. Могут быть несколько случаев.

Если $B \in T \cup \{A\}$ или B — аксиома PC или B получается по MP, рассуждаем, как в исчислении высказываний.

Предположим, что B получается по правилу Gen. Это значит, что $B = \forall x[x/a]C$ для некоторой формулы C, и имеется более короткий вывод C в $T \cup \{A\}$. Тогда, по предположению индукции, $T \vdash A \to C$. Отсюда, по правилу Бернайса, $T \vdash A \to \forall x[x/a]C$ (оно применимо, т.к. не входит в замкнутую формулу). Итак, $T \vdash A \to B$. ■

Следствие 12.4

$$T \vdash_{PC_\Omega} A \Leftrightarrow \ \vdash_{PC_\Omega} \bigwedge T \to A.$$

Если же Ω — сигнатура с равенством, то

$$T \vdash_{PC^=_\Omega} A \Leftrightarrow \ \vdash_{PC^=_\Omega} \bigwedge T \to A.$$

Доказательство Доказательство первого утверждения аналогично исчислению высказываний (лекция 5). Второе получается из него, если заменить T на $T \cup Eq_\Omega$, поскольку выводимость из T в $PC^=_\Omega$ — это не что иное, как выводимость из $T \cup Eq_\Omega$ в PC_Ω. ■

Корректность исчисления предикатов

Теорема 12.5 *(Теорема корректности)*

(1) Пусть T — теория 1-го порядка в сигнатуре Ω, A — замкнутая формула из Ω. Тогда

$$T \vdash_{PC_\Omega} A \ \Rightarrow \ T \vDash A.$$

(2) Если A — любая формула из Ω, то

$$\vdash_{PC_\Omega} A \ \Rightarrow \vDash A.$$

Доказательство Достаточно для произвольной формулы A из Ω доказать, что

$$T \vdash_{PC_\Omega} A \ \Rightarrow \ T \vDash \overline{\forall} A.$$

При замкнутой A отсюда получится (1), а при $T = \varnothing$ — (2), потому что общезначимость A равносильна общезначимости $\overline{\forall} A$ (лекция 10, определение 41).

Рассуждаем индукцией по длине вывода A из T. Предположим, что $T \vdash A$ и что $T \vDash \overline{\forall} B$ известно для всех теорем B теории T, имеющих более короткий вывод, чем A. Докажем, что $T \vDash \overline{\forall} A$.

Посмотрим, какие случаи возникают при построении вывода A (лекция 11, определение 44).

1. $A \in T$. Тогда A замкнута, $A = \overline{\forall} A$, и, очевидно, A истинна во всех моделях T.

Если — аксиома, то будем доказывать ее общезначимость.

2. A — аксиома типа (I), т.е. получается по одной из схем аксиом CL.

Общезначимость таких аксиом проверяется так же, как тавтологичность аксиом CL (см. доказательство теоремы корректности в лекции 4). Покажем это на примере схемы (I.1).

Рассмотрим формулу вида

$$C \to (B \to C),$$

или

$$C(\overrightarrow{a}) \to (B(\overrightarrow{a}) \to C(\overrightarrow{a})),$$

где $\overrightarrow{a}$ — список параметров данной формулы. Нам надо проверить (лемма 10.5(1)), что в любой модели M для любого списка элементов $\overrightarrow{m}$

$$|C(\overrightarrow{m}) \to (B(\overrightarrow{m}) \to C(\overrightarrow{m}))|_M = 1.$$

Далее можно рассуждать, как в логике высказываний: эта импликация истинна потому, что из истинности $C(\overrightarrow{m})$ следует истинность $B(\overrightarrow{m}) \to C(\overrightarrow{m})$.

3. A — аксиома типа (II.4), т.е.

$$A = \forall x[x/a](B \to C) \to (\exists x[x/a]B \to C),$$

где x не входит в C, B; a не входит в C.

Снова применяя лемму 10.5(1), проверку общезначимости A сводим к проверке истинности в любой модели M любой оцененной формулы, которая получается заменой параметров A на элементы из M:

$$A_1 = \forall x[x/a](B_1 \to C_1) \to (\exists x[x/a]B_1 \to C_1).$$

Подробнее: если $A = A(\overrightarrow{b})$, $A_1 = A(\overrightarrow{n})$ для $\overrightarrow{n}$ из M, то мы можем записать

$$B = B(\overrightarrow{b}, a),\ C = C(\overrightarrow{b});$$

тогда

$$B_1 = B(\overrightarrow{n}, a),\ C_1 = C(\overrightarrow{n}).$$

Здесь важно, что a не входит в C, поэтому и в C_1.

Покажем, что $M \vDash A_1$. Допустим

$$M \vDash \forall x[x/a](B_1 \to C_1)$$

и докажем

$$M \vDash \exists x[x/a]B_1 \to C_1,$$

для чего, в свою очередь, допустим

$$M \vDash \exists x[x/a]B_1$$

и докажем
$$M \vDash C_1.$$
Действительно, если $M \vDash \exists x[x/a]B_1$, то, по определению истинности, найдется $m \in M$, для которого
$$M \vDash [m/a]B_1.$$
Но из $M \vDash \forall x[x/a](B_1 \to C_1)$ следует, что
$$M \vDash [m/a](B_1 \to C_1).$$
Т.к. C_1 не содержит a,
$$[m/a](B_1 \to C_1) = [m/a]B_1 \to C_1.$$
Посылка этой импликации истинна в M. Значит, и заключение истинно. Что и требовалось.

4. A — аксиома вида (II.3). Этот случай аналогичен предыдущему и предлагается слушателям как упражнение.

5. A — аксиома вида (II.1), т.е.
$$A = \forall x[x/a]C \to [t/a]C.$$
Опять рассмотрим модель M и заменим параметры A на произвольные элементы из M. Получим оцененную формулу вида
$$A_1 = \forall x[x/a]C_1(a) \to [t_1/a]C_1(a),$$
где $C_1(a)$ — формула в расширенной сигнатуре модели M с параметром a (или без параметров — если a не входит в C), а t_1 — оцененный терм.

Проверим, что $M \vDash A_1$. Для этого предположим
$$M \vDash \forall x[x/a]C_1(a)$$
и докажем, что
$$M \vDash [t_1/a]C_1(a)(= C_1(t_1) \text{ в более привычной записи}).$$
По определению истинности, $M \vDash \forall x[x/a]C_1(a)$ означает, что $M \vDash C_1(m)$ для всех $m \in M$. В частности,
$$M \vDash C_1(|t_1|_M).$$
Теперь нужна лемма, из которой получится $M \vDash C_1(t_1)$.

Лемма 12.6 *Пусть M — модель сигнатуры Ω, s — терм, оцененный в M.*

(1) Если $r(a)$ — терм сигнатуры Ω, с параметром (может быть) a, то

$$|r(s)|_M = |r(|s|_M)|_M.$$

(2) Если $B(a)$ — формула сигнатуры Ω, с параметром (может быть) a, то

$$|B(s)|_M = |B(|s|_M)|_M.$$

Интуитивно лемма достаточно очевидна: чтобы найти значение сложного выражения $r(s)$, зависящего от другого выражения s, можно сначала найти значение s и подставить его вместо s в $r(s)$[2]. Однако лемму надо все-таки доказывать, чтобы убедиться, что все определения согласованы, как надо.

Доказательство (Для удобства не пишем индекс M.)

Можно заметить некоторую аналогию с леммой 8.1 о преобразовании значений при изоморфизме (и леммой 9.3 о нормализации): m заменилось на s, а $\varphi(\ldots)$ — на $|\ldots|$. И все доказательство леммы 8.1 теперь переписывается соответственно.

(1) Проводим индукцию по длине r.

Если r — константа или $r = a$, утверждение очевидно.

Пусть $r = f(r_1, \ldots, r_n)$ для $f^n \in Fun_\Omega$. Тогда

$$r(s) = f(r_1(s), \ldots, r_n(s)),$$

и также

$$r(|s|) = f(r_1(|s|), \ldots, r_n(|s|)),$$

откуда

$$|r(s)| = f_M(|r_1(s)|, \ldots, |r_n(s)|),$$
$$|r(|s|)| = f_M(|r_1(|s|)|, \ldots, |r_n(|s|)|).$$

По предположению индукции,

$$|r_1(s)| = |r_1(|s|)|, \ldots, |r_n(s)| = |r_n(|s|)|.$$

Следовательно,

$$|r(s)| = |r(|s|)|.$$

(2) Если B — атомарная, то рассуждение аналогично случаю $r = f(r_1, \ldots, r_n)$ из доказательства (1).

Остальные случаи разбираются достаточно просто. Для примера рассмотрим случай, когда $B(a) = \exists x[x/b]C(a, b)$.

[2] Например, чтобы найти $(s^3 + 1)$ при $s = \sqrt{5 \cdot 2 - 1}$, сначала находим значение s (3), а потом подставляем 3 вместо s в $(s^3 + 1)$.

$$|B(s)| = |\exists x[x/b]C(s,b)| = \max_{m \in M} |C(s,m)|,$$

$$|B(|s|)| = |\exists x[x/b]C(|s|,b)| = \max_{m \in M} |C(|s|,m)|.$$

По предположению индукции (для формулы $C(a,m)$)

$$|C(s,m)| = |C(|s|,m)|.$$

Следовательно,

$$|B(s)| = |B(|s|)|.$$

■

Применив доказанную лемму, получаем:

$$|C_1(t_1)| = |C_1(|t_1|)| = 1.$$

6. A — аксиома вида (II.2).

Этот случай аналогичен предыдущему (снова понадобится лемма 12.6) и оставляется как упражнение.

7. A получается по MP. Тогда $T \vdash B,\ B \to A$ для некоторой B, и эти выводы короче. По предположению индукции тогда

$$T \vDash \overline{\forall} B,\ \overline{\forall}(B \to A).$$

Запишем B и A как $B(\overrightarrow{a})$ и $A(\overrightarrow{a})$. Тогда для любой $M \vDash T$ и любого $\overrightarrow{m}$ из M имеем:

$$M \vDash B(\overrightarrow{m}),\ B(\overrightarrow{m}) \to A(\overrightarrow{m}).$$

Отсюда

$$M \vDash A(\overrightarrow{m}).$$

Поэтому

$$M \vDash \overline{\forall} A.$$

Таким образом, $T \vDash \overline{\forall} A$.

8. A получается по Gen. Тогда $A = \forall x[x/a]B$, $T \vdash B$, и этот вывод короче. По предположению индукции, $T \vDash \overline{\forall} B$.

Теперь заметим, что

$$\overline{\forall} B \sim \overline{\forall} A.$$

Действительно, если a входит в A, то формулы $\overline{\forall} B$ и $\overline{\forall} A$ отличаются разве что порядком кванторов всеобщности, и тогда они равносильны по лемме 10.5.

Если же a не входит в A, то $A \sim B$ — это утверждение аналогично лемме 10.5(3). В самом деле, при замене параметров B (которые совпадают с параметрами A) на элементы из модели M получим оцененные формулы B_1 и $A_1 = \forall x B_1$. Из определения истинности тогда ясно, что $|B_1|_M = |A_1|_M$. Поэтому $A \sim B$.

Теперь из $A \sim B$ следует $\forall A \sim \forall B$ (лемма 10.6(7)). Это следует также непосредственно из равенства $|B_1|_M = |A_1|_M$.

Таким образом, $T \models \forall A$. ■