Введение в математическую логику (осень 2016)

В.Б. Шехтман

Лекция 11

Предваренная нормальная форма

Определение 42 Предваренная нормальная форма (ПНФ) — *это формула вида* $\text{Ꙗ}_1 x_1 \dots \text{Ꙗ}_n x_n [x_1, \dots, x_n / a_1, \dots, a_n] A$*, где* $\text{Ꙗ}_1, \dots, \text{Ꙗ}_n$ *— кванторы,* A *— формула без кванторов,* $a_1, \dots, a_n$ *— (различные) свободные переменные,* $x_1, \dots, x_n$ *— (различные) связанные переменные, не входящие в* A*. Формула без кванторов тоже считается ПНФ.*

Мы докажем, что всякая формула первого порядка равносильна некоторой ПНФ. Начнем со вспомогательного преобразования формул.

Определение 43 Формула с тесными отрицаниями (ТО) — *это формула, построенная из литералов (т.е. атомарных формул и их отрицаний) с помощью конъюнкции, дизъюнкции и кванторов.*

Точное определение — индуктивное:

- *Если* A *— атомарная формула, то* A *и* $\neg A$ *— ТО-формулы.*
- *Если* A, B *— ТО-формулы, то* $(A \wedge B)$ *и* $(A \vee B)$ *— ТО-формулы.*
- *Если* A *— ТО-формула,* $a \in FVar$*,* $x \in BVar$*,* x *не входит в* A*, то* $\forall x [x/a] A$ *и* $\exists x [x/a] A$ *— ТО-формулы.*

Лемма 11.1 *Всякая формула первого порядка равносильна некоторой ТО-формуле.*

Доказательство Идея доказательства состоит в том, что импликацию можно выразить через отрицание и дизъюнкцию, а все отрицания можно задвинуть вглубь, используя законы Де Моргана и лемму 10.6 (2),(3).

Аккуратное доказательство проводится по индукции: именно, индукцией по длине формулы A, доказываем, что A равносильна ТО-формуле, в которую входят те же переменные[1].

Предположим, что утверждение доказано для всех формул, которые короче, чем A. По лемме 6.3, возможны следующие случаи.

(1) A — атомарная. Тогда A — ТО-формула, и доказывать нечего.

(2) $A = (B \circ C)$, где $\circ$ — это $\wedge$ или $\vee$. Формулы B, C — короче, и по предположению индукции, найдутся ТО-формулы B_1, C_1, такие что $B \sim B_1,\ C \sim C_1$. Тогда, по лемме 10.6 (6), $A \sim (B_1 \circ C_1)$, а по определению 43, $(B_1 \circ C_1)$ — ТО-формула. Переменные в ней — те же, что в A, т.к. по предположению индукции, они не изменяются при переходе от B к B_1 и от C к C_1.

(3) $A = (B \to C)$. Из логики высказываний (лемма 10.6 (1)) получаем $A \sim (\neg B \vee C)$. Формулы $\neg B$, C — короче, чем A, и тогда найдутся ТО-формулы B_1, C_1, такие что $\neg B \sim B_1,\ C \sim C_1$. По лемме 10.6 (6),(9), $A \sim (B_1 \vee C_1)$, и $(B_1 \vee C_1)$ — ТО-формула. Переменные не меняются — по предположению индукции (как и в случае (2)).

(4) $A = Ӈx[x/a]B$, x не входит в B. По предположению индукции, $B \sim B_1$ для некоторой ТО-формулы B_1 с теми же переменными. Поэтому x не входит в B_1, и, по лемме 10.6 (7), $A \sim Ӈx[x/a]B_1$. Ясно, что $Ӈx[x/a]B_1$ — ТО-формула, и переменные из A в ней сохраняются.

(5) $A = \neg B$. Тогда рассмотрим все возможности для B.

(5.1) B — атомарная. Тогда A — ТО-формула, и доказывать нечего.

(5.2) $B = (C \vee D)$. Из логики высказываний (закон Де Моргана) имеем: $A \sim (\neg C \wedge \neg D)$. Формулы $\neg C$, $\neg D$ — короче, поэтому найдутся ТО-формулы $C_1,\ D_1$, для которых $\neg C \sim C_1$, $\neg D \sim D_1$. По лемме 10.6, $A \sim (C_1 \wedge D_1)$, и снова получаем ТО-формулу. Переменные, как и раньше, сохраняются.

(5.3) $B = (C \wedge D)$. Этот случай аналогичен (5.2).

(5.4) $B = (C \to D)$. Из логики высказываний, $A = \neg(C \to D) \sim (C \wedge \neg D)$. Т.к. C, $\neg D$ — короче, чем A, имеем ТО-формулы $C_1,\ D_1$, для которых $C \sim C_1$, $\neg D \sim D_1$. По лемме 10.6 (6), $A \sim (C_1 \wedge D_1)$.

(5.5) $B = \forall x[x/a]C$, x не входит в C. По лемме 10.6 (2), $A = \neg B \sim \exists x[x/a]\neg C$. Т.к. $\neg C$ — короче, чем A, имеется ТО-формула C_1, такая что $\neg C \sim C_1$. Из-за сохранения переменных, x не входит в C_1. По лемме 10.6 (7),

$$\exists x[x/a]\neg C \sim \exists x[x/a]C_1.$$

[1] Последнее дополнение — техническое, оно понадобится далее в случаях (4), (5.5); в лекции оно не упоминалось.

Итак, A равносильна ТО-формуле $\exists x[x/a]C_1$ с теми же переменными.

(5.6) $B = \exists x[x/a]C$. Этот случай аналогичен (5.5).

(5.7) $B = \neg C$. По логике высказываний, $A = \neg\neg C \sim C$. По предположению индукции, имеем ТО-формулу $C_1 \sim C$. Итак, $A \sim C_1$. ■

Теорема 11.2 *Любая формула первого порядка равносильна некоторой ПНФ.*

Доказательство Благодаря лемме 11.1, достаточно доказать это для ТО-формул. Т.е. индукцией по длине ТО-формулы A доказываем, что A равносильна ПНФ. По лемме 6.3, возникают такие случаи.

(1) A — литерал. Тогда A — ПНФ, по определению.

(2) $A = (B \circ C)$, где $\circ$ — это $\vee$ или $\wedge$. По предположению индукции, $B \sim B'$, $C \sim C'$ для некоторых ПНФ B', C'. Тогда, по лемме 10.6, $A = (B \circ C) \sim (B' \circ C')$. Теперь нужна еще одна лемма.

Лемма 11.3 *Если A, B — ПНФ, $\circ = \vee$ или $\wedge$, то формула $(A \circ B)$ равносильна ПНФ.*

Доказательство Доказываем индукцией по числу кванторов в $(A \circ B)$.

Если кванторов нет, то это уже ПНФ, и доказывать нечего.

Если есть кванторы, то мы можем считать, что они есть в A: если они есть только в B, можно переставить A и B — т.к. $(A \circ B) \sim (B \circ A)$ (логика высказываний).

Итак, пусть $A = \text{Я}x[x/a]A_1$.

Случай 1. a, x не входят в B.

По лемме 10.6,

$$(A \circ B) = (\text{Я}x[x/a]A_1 \circ B) \sim \text{Я}x[x/a](A_1 \circ B).$$

Число кванторов в $A_1 \circ B$ меньше, чем в $A \circ B$, и, по предположению индукции, $(A_1 \circ B) \sim C$ для некоторой ПНФ C.

(1.1) Если x не входит в C, то, опять по лемме 10.6,

$$\text{Я}x[x/a](A_1 \circ B) \sim \text{Я}x[x/a]C.$$

Таким образом, $(A \circ B)$ равносильна ПНФ $\text{Я}x[x/a]C$.

(1.2) Если x входит в C, то возьмем новую связанную переменную y, которой нет в A_1, B, C. По лемме 10.6, $A = \text{Я}x[x/a]A_1 \sim \text{Я}y[y/a]A_1$, и далее $(A \circ B) \sim (\text{Я}y[y/a]A_1 \circ B)$. Теперь, как в (1.1):

$$(\text{Я}y[y/a]A_1 \circ B) \sim \text{Я}y[y/a]C.$$

Случай 2. a или x входит в B.

Тогда можно эти переменные переименовать. А именно, выберем $b \in FVar$, $y \in BVar$, которые не входят в B. По лемме 10.6,

$$A = \mathsf{Q}x[x/a]A_1 \sim \mathsf{Q}y[y/b][b/a]A_1.$$

Формула $\mathsf{Q}y[y/b][b/a]A_1$ равносильна ПНФ, согласно случаю 1 (где вместо A_1 надо использовать $[b/a]A_1$). ■

Возвращаемся к доказательству теоремы 11.2, случай (2). По лемме 11.3 получаем, что $(B' \circ C')$ равносильна ПНФ, поэтому и A равносильна ПНФ.

(3) $A = \mathsf{Q}x[x/a]B$.

По предположению индукции, имеется ПНФ B', равносильная B. Выберем какую-нибудь связанную переменную y, не входящую ни в B, ни в B'. По лемме 10.6 получаем:

$$A = \mathsf{Q}x[x/a]B \sim \mathsf{Q}y[y/a]B \sim \mathsf{Q}y[y/a]B'.$$

Формула $\mathsf{Q}y[y/a]B'$ — ПНФ. ■

<u>Пример</u> Рассмотрим формулу $\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$. Она приводится к ПНФ следующим образом:

$$(\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)) \sim (\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \sim \forall x\,(P(x) \vee \exists y Q(y)) \sim \forall x \exists y\,(P(x) \vee Q(y)).$$

Подробнее, это происходит так:

$$(\forall x[x/a]P(a)\ \vee\ \exists x[x/a]Q(a)) \sim (\forall x[x/a]P(a)\ \vee\ \exists y[y/b]Q(b))$$

$$\sim \forall x\,[x/a](P(a)\ \vee\ \exists y[y/b]Q(b)) \sim \forall x \exists y\,[x, y/a, b](P(a)\ \vee\ Q(b)).$$

<u>Замечание</u> В логике высказываний мы можем выяснить, является ли данная формула тавтологией, приведя ее к СДНФ. В логике предикатов аналогичный метод не работает: у одной и той же формулы могут быть несколько совершенно разных ПНФ. И по данной ПНФ непонятно, как установить общезначимость. В частности, неверно, что

$$\models \mathsf{Q}x_1 \ldots \mathsf{Q}x_n[x_1, \ldots, x_n/a_1, \ldots, a_n]A\ \Rightarrow \models A.$$

Например, формула $\exists x \forall y\,(P(x) \to P(y))$ общезначима, т.к.

$$\exists x \forall y\,(P(x) \to P(y)) \sim \exists x \forall y\,(\neg P(x)\ \vee\ P(y)) \sim$$

$$\exists x\,(\neg P(x)\ \vee\ \forall y P(y)) \sim (\exists x \neg P(x)\ \vee\ \forall y P(y)) \sim (\neg \forall x P(x)\ \vee\ \forall y P(y))$$

$$\sim (\neg \forall x P(x)\ \vee\ \forall x P(x)).$$

При этом $P(x) \to P(y)$ — совсем не общезначима.

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов в сигнатуре Ω (PC_Ω) задается следующими аксиомами и правилами вывода.

(I) Схемы аксиом исчисления высказываний CL (10 схем аксиом из лекции 4, но теперь A, B, C — произвольные формулы сигнатуры Ω).

(II) 4 схемы аксиом с кванторами. Здесь $A \in Fm_\Omega$, $t \in Tm_\Omega$, $[t/a]A$ обозначает результат замены всех вхождений a в A на t.

II.1. $\forall x[x/a]A \to [t/a]A$
(где x не входит в A).

II.2. $[t/a]A \to \exists x[x/a]A$
(где x не входит в A).

II.3. $\forall x[x/a](A \to B) \to (A \to \forall x[x/a]B)$
(где x не входит в A, B; a не входит в A)

II.4. $\forall x[x/a](B \to A) \to (\exists x[x/a]B \to A)$
(где x не входит в A, B; a не входит в A)

(III) Правила вывода

$$\frac{A, A \to B}{B}\,(MP),$$

$$\frac{A}{\forall x[x/a]A}\,(\text{правило обобщения } Gen)$$

(где x не входит в A).

Замечание Ограничение "a не входит в A" в аксиомах II.3, II.4 — существенное. Без него получалась бы, например, такая аксиома:

$$\forall x[x/a](P(a) \to P(a)) \to (P(a) \to \forall x P(x)).$$

Эта формула, как можно проверить, не общезначима. А исчисление предикатов строится как раз для того, чтобы доказывать общезначимые формулы.

Определение 44 *Как и в исчислении высказываний (лекция 4), определяем* вывод (доказательство) *в исчислении предикатов: это конечная последовательность формул, каждая из которых — либо аксиома, либо получается из предыдущих по правилу вывода.*

Вывод формулы A (в исчислении предикатов) *— это вывод, в котором A — последняя формула. Если такой вывод существует, говорят, что A* выводима в исчислении предикатов*, или A —* теорема исчисления предикатов *(обозначение: $\vdash_{PC_\Omega} A$).*

Аналогично определяется вывод из множества гипотез Γ: в нем разрешается использовать еще формулы из Γ. Вывод формулы A из Γ (в исчислении предикатов) *— это вывод из Γ, в котором A — последняя формула. Если существует вывод A из Γ, то говорят, что A* выводима из Γ *(обозначение: $\Gamma \vdash_{PC_\Omega} A$).*

Нижний индекс PC_Ω, как правило, будем опускать.

Пример 1 $\vdash \forall x[x/a]A \to A$ (где x не входит в A).
Эта формула — частный случай аксиомы (II.1): надо взять $t = a$.
Точно так же из аксиомы (II.2) получаем:

$$\vdash A \to \exists x[x/a]A$$

Как и в исчислении высказываний, выводимость формул можно доказывать с помощью допустимых правил, без явного построения вывода.

Определение 45 *Правило*

$$\frac{A_1, \ldots, A_n}{B}$$

называется допустимым (в исчислении предикатов)*, если из выводимости формул $A_1, \ldots, A_n$ следует выводимость формулы B.*

Пример 2 Допустимо *правило силлогизма* (или *транзитивности импликации*):

$$\frac{A \to B, B \to C}{A \to C}$$

Это доказывается, как в CL, с использованием аксиом (I.1), (I.2). А именно, запишем сначала выводы формул $A \to B, B \to C$, а затем:

1. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$. (I.1)
2. $A \to (B \to C)$. $(B \to C, 1, MP)$
3. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$. (I.2)
4. $(A \to B) \to (A \to C)$. $(2, 3, MP)$
5. $(A \to C)$. $(A \to B, 4, MP)$

Более короткое доказательство допустимости получается из теоремы дедукции; см. лекцию 5[2].

Пример 3 $\vdash \forall x[x/a]A \to \exists x[x/a]A$ (где x не входит в A).

Как мы видели (пример 1), $\vdash \forall x[x/a]A \to A,\ A \to \exists x[x/a]A$. По правилу силлогизма, тогда $\vdash \forall x[x/a]A \to \exists x[x/a]A$.

[2] Можно повторить те же рассуждения, т.к. в них не используется правило Gen.

Пример 4 Допустимы *правила Бернайса*:

$$\frac{A \to B}{A \to \forall x[x/a]B}\ , \quad \frac{B \to A}{\exists x[x/a]B \to A}$$

(где a не входит в A; x не входит в B).

Оба правила рассматриваются аналогично, поэтому остановимся только на первом из них. Разберем сначала более простой случай, когда x не входит также и в A. Тогда у нас есть аксиома (II.3):

$$\forall x[x/a](A \to B) \to (A \to \forall x[x/a]B).$$

Поэтому, если имеется доказательство формулы $A \to B$, то к нему можно дописать еще 3 формулы:

1. $\forall x[x/a](A \to B)$ (получается по Gen).
2. $\forall x[x/a](A \to B) \to (A \to \forall x[x/a]B)$ (аксиома II.3).
3. $A \to \forall x[x/a]B$ (получается по MP).

Общий случай, когда x может входить в A, разберем на следующей лекции.