Введение в математическую логику (осень 2016)

В.Б. Шехтман

Лекция 10

В дальнейшем мы рассматриваем только теории с равенством и нормальные модели; отдельные исключения будут оговариваться.

Теория конечной модели

Докажем утверждение, которое неявно возникало в примерах из предыдущих лекций.

Теорема 10.1 *Элементарная теория конечной модели сильно категорична.*

Доказательство Пусть M — конечная модель сигнатуры Ω. Доказательство сильной категоричности $Th(M)$ проведем для случая, когда Ω конечна и не содержит функциональных символов.

Мы построим формулу A_M, которая полностью описывает M, следующим образом.

Пусть $\underline{M} = \{m_1, \ldots, m_n\}$. Положим

$$A =_{def} \exists v_1 \ldots \exists v_n [v_1 \ldots v_n / a_1 \ldots a_n] \psi_M,$$

где

$$\psi_M =_{def} (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} a_i \neq a_j) \wedge \forall v_{n+1} \bigvee_{i=1}^{n} (v_{n+1} = a_i) \wedge$$
$$\bigwedge \{c = a_i \mid c \in Const_\Omega,\ c_M \text{ равно } a_i\} \wedge$$
$$\bigwedge \{P^k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \mid P^k \in Pred_\Omega,\ M \vDash P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\} \wedge$$
$$\bigwedge \{\neg P^k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \mid P^k \in Pred_\Omega,\ M \nvDash P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\}.$$

Здесь мы используем обычное сокращение: $a \neq b =_{def} \neg(a = b)$.

Лемма 10.2 *Для нормальной модели M' сигнатуры Ω*

$$M' \vDash A_M \Leftrightarrow M' \cong M.$$

Доказательство (леммы). ($\Leftarrow$) Заметим, что

$$M \vDash \psi_M(m_1, \ldots, m_n).$$

Действительно,

$$\psi_M(m_1, \ldots, m_n) = (\bigwedge_{1 \le i < j \le n} m_i \ne m_j) \wedge \forall v_{n+1} \bigvee_{i=1}^{n} (v_{n+1} = m_i) \wedge$$

$$\bigwedge \{c = m_i \mid c \in Const_\Omega,\ c_M \text{ равно } m_i\} \wedge$$

$$\bigwedge \{P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) \mid P^k \in Pred_\Omega,\ M \vDash P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\} \wedge$$

$$\bigwedge \{\neg P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) \mid P^k \in Pred_\Omega,\ M \nvDash P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\}.$$

Высказывание $M \vDash \psi_M(m_1, \ldots, m_n)$ разлагается в конъюнкцию нескольких высказываний. Первый член утверждает, что все m_i различны (напомним, что M нормальна), второй — что всякий элемент из M равен одному из m_i. Третий член означает, что для всякой константы c, $M \vDash c = m_i$, если c_M равно m_i — это очевидно, по определению истинности (см. определения 34, 35). Четвертый и пятый члены также очевидны.

Теперь по определению истинности, из $M \vDash \psi_M(m_1, \ldots, m_n)$ получаем $M \vDash A_M$. Тогда, если $M \cong M'$, то и $M' \vDash A_M$ — по теореме 8.2.

($\Rightarrow$) Предположим, что $M' \vDash A_M$ и построим изоморфизм M на M'. Снова по определению истинности, найдутся $m'_1, \ldots, m'_n \in M'$, для которых

$$M' \vDash \psi_M(m'_1, \ldots, m'_n).$$

Для удобства опять распишем $\psi_M(m'_1, \ldots, m'_n)$:

$$(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} m'_i \ne m'_j) \wedge \forall v_{n+1} \bigvee_{i=1}^{n} (v_{n+1} = m'_i) \wedge$$

$$\bigwedge \{c = m'_i \mid c \in Const_\Omega,\ c_M \text{ равно } m_i\} \wedge$$

$$\bigwedge \{P^k(m'_{i_1}, \ldots, m'_{i_k}) \mid P^k \in Pred_\Omega,\ M \vDash P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\} \wedge$$

$$\bigwedge \{\neg P^k(m'_{i_1}, \ldots, m'_{i_k}) \mid P^k \in Pred_\Omega,\ M \nvDash P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\}.$$

Докажем, что отображение φ, переводящее каждый m_i в m'_i — искомый изоморфизм.

1. φ — инъекция. Это обеспечивает 1-й член конъюнкции: при $i < j$ $M \vDash m'_i \ne m'_j$, т.е. m'_i и m'_j не совпадают.

2. φ — сюръекция. Об этом говорит 2-й член: любой элемент M' равен одному из m'_i.

3. $\varphi(c_M)$ равно $c_{M'}$. Это получается из 3-го члена: если c_M равно m_i, то $M' \vDash c = m'_i$, т.е. $c_{M'}$ равно m'_i (которое и есть $\varphi(c_M)$).

4. $M' \vDash P^k(m'_{i_1}, \dots, m'_{i_k}) \Leftrightarrow M \vDash P^k(m_{i_1}, \dots, m_{i_k})$. Это получается из 4-го и 5-го членов.

Действительно, если $M \vDash P^k(m_{i_1}, \dots, m_{i_k})$, то из 4-го члена, $M' \vDash P^k(m'_{i_1}, \dots, m'_{i_k})$.

Если же $M \nvDash P^k(m_{i_1}, \dots, m_{i_k})$, то из 5-го члена, $M' \nvDash P^k(m'_{i_1}, \dots, m'_{i_k})$. ■

Докажем теперь сильную категоричность $Th(M)$.

Пусть $M' \vDash Th(M)$. По доказанной лемме, $A_M \in Th(M)$, поэтому $M' \vDash A_M$. Тогда $M' \cong M$ — по той же лемме. ■

Следствие 10.3 *Если M — конечная модель и $M' \equiv M$, то $M' \cong M$.*

Доказательство Если $M' \equiv M$, то $M' \vDash Th(M)$. Тогда, по теореме 10.1, $M' \cong M$. ■

Пример: геометрические теории

Опишем теперь теорию AfG — *аффинную геометрию плоскости.* В этой геометрии имеются 2 вида основных объектов: точки и прямые. Чтобы рассуждать о них в логике первого порядка, мы используем такую сигнатуру.

Предикатные символы: P^1 (“быть точкой”), L^1 (“быть прямой”), $\in^2$ (“принадлежать”)[1], =. Констант и функциональных символов нет.

Аксиомы AfG — следующие.

(I) Стандартные аксиомы равенства.

(II)

$$\forall x(P(x) \to \neg L(x)),$$

$$\forall x \forall y(x \in y \to P(x) \wedge L(y)).$$

(III)

$(A1)$ $\forall x \forall y\, (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \to \exists! z\, (x \in z \wedge y \in z)).$

Т.е. через 2 различные точки проходит единственная прямая. Здесь используется сокращение $\exists!$, которое понимается обычным образом:

$$\exists! x[x/a]A =_{def} (\exists x[x/a]A) \wedge \forall y([y/a]A \to x = y).$$

[1] Как обычно, вместо $\in (x, y)$ пишем $x \in y$

$(A2)$ $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \neg \exists y \bigwedge_{i=1}^{3} (x_i \in y)$.

Т.е. найдутся 3 точки, не лежащие на одной прямой.

$(A3)$ (аксиома Плейфера) $\forall x \forall y\, (P(x) \wedge L(y) \wedge x \notin y \to \exists! z\, (x \in z \wedge z || y))$.

Это — известная аксиома параллельных: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной. Здесь использовано сокращение

$$z||y =_{def} \neg \exists t\, (t \in z \wedge t \in y).$$

Приведем без доказательства некоторые факты об этой теории.

Модель AfG называется *аффинной плоскостью*. Естественные модели AfG получаются из полей (в том числе, некоммутативных). Если K — поле, то строится модель M, у которой точки — это элементы K^2, а прямые — как обычно, множества решений нетривиальных линейных уравнений ($\{(x, y) \mid k_1 x + k_2 y + k_3 = 0\}$, где $k_1 \neq 0$ или $k_2 \neq 0$). Т.е.

$$L_M(m) \Leftrightarrow m \in K^2,$$

$$P_M(m) \Leftrightarrow m \text{ — прямая в } K^2,$$

$$\in_M \text{ — предикат принадлежности.}$$

Такая модель называется *аффинной плоскостью над полем* K.

Можно легко доказать, что если модель $M \vDash AfG$ конечна, то все прямые содержат одинаковое число точек (обозначим его через m), и общее число точек равно m^2, а общее число прямых — $(m^2 + m)$.

Пусть $P_{=n}$ — формула, которая утверждает, что существует ровно n точек. Таким образом,

$$\text{Теория } (AfG + P_{=n}) \text{ выполнима } \Rightarrow n \text{ — точный квадрат.}$$

Как известно, число элементов конечного поля (поля Галуа) равно степени простого числа. Поэтому аффинные плоскости над этими полями дают модели теорий $AfG + P_{=p^{2k}}$.

Недоказанная гипотеза состоит в том, что

$$\text{Теория } (AfG + P_{=n}) \text{ выполнима } \Rightarrow n \text{ — четная степень простого числа.}$$

(наименьшее n, для которого проблема выполнимости не решена, равно 144).

Однако аналогичное утверждение справедливо для расширения аффинной геометрии дополнительной аксиомой Дезарга.[2]

[2] См., напр., классическую книгу: Э.Артин. Геометрическая алгебра. М., 1969.

В заключение этого раздела, докажем в логических терминах, что в аффинной геометрии нельзя измерять углы.

Рассмотрим стандартную аффинную плоскость над полем $\mathbf{R}$.

Предложение 10.4 *Отношение перпендикулярности прямых не определимо в аффинной плоскости над* $\mathbf{R}$.

Доказательство Обозначим эту плоскость (как модель нашей сигнатуры) через $\mathbf{A}$. Благодаря теореме 9.2, для доказательства достаточно построить автоморфизм $\mathbf{A}$, не сохраняющий перпендикулярность.

Рассмотрим отображение $\varphi : (x, y) \mapsto (x, y/2)$ (сжатие к оси OX). При этом каждая прямая (как множество) переходит в прямую, поэтому φ можно понимать и как отображение $\mathbf{A}$ в $\mathbf{A}$. Из определения очевидно, что для точки Q и прямой l, $Q \in l \Leftrightarrow \varphi(Q) \in \varphi(l)$. Таким образом, φ сохраняет все предикаты.

Ясно, что φ — биекция; обратное отображение переводит (x, y) в $(x, 2y)$.

Однако φ переводит перпендикулярные прямые с уравнениями $y = x$ и $y = -x$ в прямые $y = x/2$ и $y = -x/2$, которые не перпендикулярны. ■

Общезначимость и равносильность

Определение 39 *Замкнутые формулы A, B (в некоторой сигнатуре) называются* равносильными*, если формула $A \leftrightarrow B$ общезначима.*

Как и в логике высказываний, равносильность обозначается знаком $\sim$.

Напомним (см. лекцию 8), что через $A(a_1, \dots, a_n)$ мы обозначаем формулу, у которой все параметры содержатся среди $a_1, \dots, a_n$. При этом, если $m_1, \dots, m_n$ — элементы некоторой модели, то $A(m_1, \dots, m_n)$ обозначает результат подстановки $[m_1, \dots, m_n/a_1, \dots, a_n]A$. Если же $x_1, \dots, x_n$ — какие-то (различные) связанные переменные, не входящие в A, то результат подстановки $[x_1, \dots, x_n/a_1, \dots, a_n]A$ будем обозначать через $A(x_1, \dots, x_n)$. (Заметим, что выражение $A(x_1, \dots, x_n)$ — не формула, но может быть частью формулы: в частности, $\forall x_1 \dots \forall x_n A(x_1, \dots, x_n)$ — формула, согласно определению 20.)

Лемма 10.5 *Пусть $A(a_1, \dots, a_n)$ — формула сигнатуры Ω, $x_1, \dots, x_n$ — (различные) связанные переменные, не входящие в A.*

(1) Для любой модели M сигнатуры Ω

$M \models \forall x_1 \dots \forall x_n A(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow$ *для всех* $m_1, \dots, m_n \in M$ $M \models A(m_1, \dots, m_n)$.

(2) Для любого списка $y_1, \ldots, y_n$ (различных) связанных переменных, не входящих в A

$\forall x_1 \ldots \forall x_n A(x_1, \ldots, x_n) \sim \forall y_1 \ldots \forall y_n A(y_1, \ldots, y_n)$.

(3) Если формула A замкнута, x — связанная переменная, не входящая в A, то $A \sim \forall x A$.

Доказательство (1) следует из определения истинности (формально — индукцией по n).

(2) сразу следует из (1): для обеих формул условие истинности в M — одно и то же.

(3) — тоже очевидное следствие определения истинности. Действительно, в этом случае $M \models \forall x A$ (где $\forall x A$ получается как $\forall x[x/a]A$ с переменной a, не входящей в A) равносильно $M \models A$, т.к. при замене фиктивного a на любое m с формулой A ничего не произойдет. ■

Определение 40 *Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — список параметров формулы A в алфавитном порядке*[3]*, и пусть $x_1, \ldots, x_n$ — список первых связанных переменных, не входящих в A, также в алфавитном порядке. Тогда* универсальным замыканием *формулы A называется формула*

$\forall x_1 \ldots \forall x_n [x_1, \ldots, x_n / b_1, \ldots, b_n] A$.

Так определенное универсальное замыкание задается однозначно по A. Но на самом деле нас интересует эта формула с точностью до равносильности. Лемма 10.5 показывает, что мы можем расположить $b_1, \ldots, b_n$ в любом порядке, и переменные $x_1, \ldots, x_n$ тоже можно выбрать как угодно — лишь бы они не входили в A — все построенные формулы окажутся равносильными. Поэтому универсальным замыканием называют любую из них.

Универсальное замыкание A (какое-нибудь) будем обозначать $\overline{\forall} A$.

Теперь можно определить общезначимость и равносильность для произвольных формул.

Определение 41 *Формула A называется* общезначимой*, если общезначимо ее универсальное замыкание.*

Формулы A, B называются равносильными*, если общезначима формула $\overline{\forall}(A \leftrightarrow B)$.*

Для произвольных формул общезначимость по-прежнему обозначается знаком $\models$, а равносильность — знаком $\sim$.

Таким образом, по лемме 10.5

[3] Этот порядок задается нумерацией множества $FVar$, см. лекцию 6.

$$\vDash A(\overrightarrow{a}) \Leftrightarrow \text{ для любой модели } M \text{ и } \overrightarrow{m} \text{ из } M,\ M \vDash A(\overrightarrow{m}),$$ [4]

$$A(\overrightarrow{a}) \sim B(\overrightarrow{a}) \Leftrightarrow \text{ для любой модели } M \text{ и } \overrightarrow{m} \text{ из } M,\ |A(\overrightarrow{m})|_M = |B(\overrightarrow{m})|_M.$$

Лемма 10.6

(1) Для формул 1-го порядка сохраняются все равносильности из логики высказываний.

(2) $\neg\forall x[x/a]A \sim \exists x[x/a]\neg A$.

(3) $\neg\exists x[x/a]A \sim \forall x[x/a]\neg A$.

(4) $Ꙗ x[x/a](A\circ B) \sim (Ꙗ x[x/a]A\circ B)$, *если a не входит в B (и x не входит ни в A, ни в B).*

Здесь $Ꙗ$ обозначает квантор $\forall$ или $\exists$, а $\circ$ — связку $\vee$ или $\wedge$.

(5) Если $A \sim B$, то $\neg A \sim \neg B$.

(6) Если $A \sim A'$ и $B \sim B'$ то $(A \circ B) \sim (A' \circ B')$ (где $\circ$ — это $\vee$, $\wedge$ или $\to$).

(7) Если $A \sim B$, то $Ꙗ x[x/a]A \sim Ꙗ x[x/a]B$ (при условии, что x не входит ни в A, ни в B).

(8) $Ꙗ x[x/a]A \sim Ꙗ y[y/a]A \sim Ꙗ y[y/b][b/a]A$, *если x, y, b не входят в A (здесь $x, y \in BVar$, $a, b \in FVar$) .*

(9) $\sim$ задает отношение эквивалентности на Fm_Ω.

Доказательство (1) Более точная формулировка этого утверждения - такая:

если для формул логики высказываний $A(p_1, \ldots, p_n) \sim B(p_1, \ldots, p_n)$ и если $C_1, \ldots, C_n$ — формулы 1-го порядка в некоторой сигнатуре, то $A(C_1, \ldots, C_n) \sim B(C_1, \ldots, C_n)$.

Здесь предполагается, что в A, B могут встречаться только переменные $p_1, \ldots, p_n$; $A(C_1, \ldots, C_n)$ получается из A заменой каждого p_i на C_i; аналогично для $B(C_1, \ldots, C_n)$.

Мы не будем давать подробного доказательства, а ограничимся одним примером:

$$\neg\neg C \sim C.$$

В логике высказываний эти формулы равносильны, потому что при любой оценке значения $\neg\neg C$ и C совпадают.

Для формул первого порядка рассуждаем аналогично. Теперь формула C может содержать параметры; запишем ее как $C(\overrightarrow{a})$. Таким образом, надо проверить, что для любой модели M и $\overrightarrow{m}$ из M

[4] Подразумевается, что M — в нужной сигнатуре, а $\overrightarrow{m}$ — список ее элементов нужной длины.

$$|\neg\neg C(\overrightarrow{m})|_M = |C(\overrightarrow{m})|_M.$$

А это проверяется, как и в логике высказываний:

$$|\neg\neg C(\overrightarrow{m})|_M = 1 - |\neg C(\overrightarrow{m})|_M = |C(\overrightarrow{m})|_M.$$

(2) Запишем A как $A(a, \overrightarrow{b})$; надо проверить, что в любой модели для всех $\overrightarrow{m}$

$$|\neg\forall x A(x, \overrightarrow{m})|_M = |\exists x \neg A(x, \overrightarrow{m})|_M.$$

Но это сразу следует из определения истинности:

$$|\neg\forall x A(x, \overrightarrow{m})|_M = 1 \Leftrightarrow |\forall x A(x, \overrightarrow{m})|_M = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{не для всех } k \in M\ |A(k, \overrightarrow{m})|_M = 1 \Leftrightarrow$$

$$\text{найдется } k \in M, \text{ для которого } |A(k, \overrightarrow{m})|_M = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{найдется } k \in M, \text{ для которого } |\neg A(k, \overrightarrow{m})|_M = 1 \Leftrightarrow |\exists x \neg A(x, \overrightarrow{m})|_M = 1.$$

(3) Доказывается аналогично (2) (упражнение).

(4) Проверим это для $\text{Ч} = \exists$ и $\circ = \wedge$; остальные случаи разбираются аналогично.

Запишем A как $A(a, \overrightarrow{b})$, а B — как $B(\overrightarrow{b})$ (поскольку a не входит в B). Надо доказать, что в любой модели M для любого $\overrightarrow{m}$

$$(*) \quad |\exists x(A(x, \overrightarrow{m}) \wedge B(\overrightarrow{m}))|_M = 1 \Leftrightarrow |\exists x A(x, \overrightarrow{m}) \wedge B(\overrightarrow{m})|_M = 1.$$

В самом деле,

$$|\exists x(A(x, \overrightarrow{m}) \wedge B(\overrightarrow{m}))|_M = 1 \Leftrightarrow \text{ найдется } k, \text{ такое что } |A(k, \overrightarrow{m}) \wedge B(\overrightarrow{m})|_M = 1 \Leftrightarrow$$

$$\text{найдется } k, \text{ такое что } (|A(k, \overrightarrow{m})|_M = 1 \text{ и } |B(\overrightarrow{m})|_M = 1).$$

Но условие $|B(\overrightarrow{m})|_M = 1$ не зависит от k. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\text{найдется } k, \text{ такое что } (|A(k, \overrightarrow{m})|_M = 1 \text{ и } |B(\overrightarrow{m})|_M = 1) \Leftrightarrow \\
&(\text{найдется } k, \text{ такое что } |A(k, \overrightarrow{m})|_M = 1) \text{ и } |B(\overrightarrow{m})|_M = 1 \Leftrightarrow \\
&|\exists x A(x, \overrightarrow{m})|_M = 1 \text{ и } |B(\overrightarrow{m})|_M = 1 \Leftrightarrow |\exists x A(x, \overrightarrow{m}) \wedge B(\overrightarrow{m})|_M = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, $(*)$ выполняется.

(8) Рассмотрим случай $\text{Ч} = \exists$. Запишем A как $A(a, \overrightarrow{e})$, где $\overrightarrow{e}$ — список всех параметров, кроме a. По определению истинности, в модели M для любого $\overrightarrow{m}$

$$|\exists x A(x, \overrightarrow{m})|_M = \max_{k \in M} |A(k, \overrightarrow{m})|_M.$$

По тому же определению,

$$|\exists y A(y, \overrightarrow{m})|_M = \max_{k \in M} |A(k, \overrightarrow{m})|_M.$$

Т.е. первая равносильность из (8) очевидна.

Вторая равносильность тоже очевидна, т.к. выражения $[y/a]A$ и $[y/b][b/a]A$ совпадают: если заменить в A все вхождения a на новую букву b, а потом все вхождения b — на y, то это все равно, что сразу заменить все a на y.

Остальные утверждения леммы проверяются достаточно легко. ■