Введение в математическую логику (осень 2016)

В.Б. Шехтман

Лекция 9

Определение истинности в модели: корректность

Докажем, что определение истинности в модели, данное на прошлой лекции (определение 25), корректно.

Лемма 9.1 *Для любой модели M существует единственное отображение $A \mapsto |A|_M$ оцененных в M формул в $\{0,1\}$, удовлетворяющее условиям из определения 25.*

Доказательство Аналогично лемме 2.1. "Длиной"формулы (в этом доказательстве) назовем число вхождений в нее логических связок и кванторов; значение $|A|_M$ определяем индукцией по длине A. Применим лемму 6.3 об однозначном анализе формул.

1. Если $A = P(t_1, \dots, t_n)$ — атомарная, то $|A|_M$ однозначно определено — по лемме 7.2.

2. Если $A = (B \wedge C)$, то надо положить $|A|_M = min(|B|_M, |C|_M)$. Формулы B, C единственны по лемме 6.3, а $|B|_M$, $|C|_M$ определены однозначно по предположению индукции (B, C — меньшей длины, чем A). Поэтому $|A|_M$ задается однозначно.

3, 4, 5. Аналогично рассуждаем в случаях $A = \neg B$, $(B \vee C)$, $(B \to C)$.

6. Пусть $A = \exists x[x/a]B$. Тогда надо определить $|A|_M = \max\limits_{m \in M} |[m/a]B|_M$. B и $[m/a]B$ — меньшей длины, чем A, поэтому $|A|_M$ задается однозначно при данном выборе B.

Однако теперь уже B не единственна. Рассмотрим другую формулу B', такую что $A = \exists x[x/a']B'$ для некоторой свободной переменной a', причем x не входит в B'. Тогда $[x/a']B' = [x/a]B$, поэтому B' получается из B при замене a на a' (или: заменой сначала всех a на x, а потом всех x на a'). Т.е. $B' = [a'/a]B$.

Отсюда получаем, что $[m/a']B' = [m/a'][a'/a]B = [m/a]B$. Поэтому если мы определили

$$|A|_M = \max_{m \in M} |[m/a]B|_M,$$

то также получаем и

$$|A|_M = \max_{m \in M} |[m/a']B'|_M.$$

Таким образом, $|A|_M$ и в этом случае определено однозначно — независимо от того, используем мы B или B' для построения A.

7. Случай $A = \forall x[x/a]B$ рассматривается аналогично. ■

Определимость и автоморфизмы

В этом разделе мы докажем необходимое условие определимости предиката в модели. Согласно определению 38, определимый k-местный предикат имеет вид A_M для некоторой формулы $A(b_1, \ldots, b_k)$; это означает, что

$$A_M(m_1, \ldots, m_k) = |[m_1, \ldots, m_k/b_1, \ldots, b_k]A|_M,$$

или, в сокращенной записи,

$$A_M(\overrightarrow{m}) = |A(\overrightarrow{m})|_M.$$

Как и в алгебре, *автоморфизм* модели — это ее изоморфизм на себя. Из леммы 8.1 сразу же получаем:

Теорема 9.2 *Если φ - автоморфизм модели сигнатуры Ω, $A(b_1, \ldots, b_k)$ — формула той же сигнатуры, то для всех $m_1, \ldots, m_k \in M$*

$$A_M(\varphi(m_1), \ldots, \varphi(m_k)) = A_M(m_1, \ldots, m_k).$$

Таким образом, определимый в M предикат инвариантен при всех автоморфизмах M.

Пример 1 Рассмотрим множество целых чисел $\mathbf{Z}$ как модель сигнатуры групп $\{=^2, +^2, 0, -^1\}$, с обычным пониманием этих символов.

У этой модели есть автоморфизм $\varphi(x) = -x$: это отображение — биекция (обратно само к себе), сохраняет 0, сумму и одноместный минус (который совпадает с φ)

Предикат $m_1 < m_2$ не определим в этой модели, т.к. он не инвариантен при этом автоморфизме: неверно, что $m_1 < m_2 \Leftrightarrow -m_1 < -m_2$.

Поскольку предикаты соответствуют отношениям, мы можем говорить и об определимости отношений: k-местное отношение R определимо в M формулой $A(\overrightarrow{b})$, если определим соответствующий предикат, т.е. для всех $\overrightarrow{m} \in M^k$

$$M \vDash A(\overrightarrow{m}) \Leftrightarrow \overrightarrow{m} \in R.$$

В частности (при $k = 1$): подмножество $S \subseteq M$ определимо формулой $A(a)$, если для всех $m \in M$

$$M \vDash A(m) \Leftrightarrow m \in S.$$

Теорема 9.2 означает, что определимые отношения инвариантны при автоморфизмах:

$$\overrightarrow{m} \in R \Leftrightarrow \varphi\overrightarrow{m} \in R.$$

Пример 2 Рассмотрим $\mathbf{Z}$ в той же сигнатуре, что в примере 1. Тогда подмножество $\mathbf{N}$ не определимо: оно не инвариантно при автоморфизме $\varphi(x) = -x$.

Однако, если добавить в сигнатуру умножение, $\mathbf{N}$ станет определимым. Для этого можно применить теорему Лагранжа о представимости всякого натурального числа в виде суммы 4 квадратов:

$$\mathbf{Z} \vDash \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = m) \Leftrightarrow m \in \mathbf{N},$$

где x^2 обозначает $x \cdot x$.

Конечно же, и в этой сигнатуре не все подмножества определимы: определимых подмножеств (как и всех формул в данной сигнатуре) — счетное число, а всех подмножеств — континуум.

Стандартные теории равенства и нормальные модели

Рассмотрим сигнатуру Ω, содержащую предикатный символ равенства $(=)$. В этой сигнатуре рассмотрим теорию Eq_Ω со следующими *стандартными аксиомами равенства.*

(O) Аксиомы теории Eq (лекция 7, пример 1) — рефлексивность, симметричность и транзитивность.

(I) $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (\bigwedge\limits_{i=1}^{n} x_i = y_i \to (P^n(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow P^n(y_1, \dots, y_n)))$ для всех $P^n \in Pred_\Omega$.

(II) $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (\bigwedge\limits_{i=1}^{n} x_i = y_i \to f^n(x_1, \dots, x_n) = f^n(y_1, \dots, y_n))$ для всех $f^n \in Fun_\Omega$.

Запишем эти аксиомы в сокращенном виде:

(I) $\overline{\forall}(\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} \to (P^n(\overrightarrow{x}) \leftrightarrow P^n(\overrightarrow{y})))$.

(II) $\overline{\forall}(\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} \to f^n(\overrightarrow{x}) = f^n(\overrightarrow{y}))$.

Лемма 9.3 *Если M — нормальная модель сигнатуры с равенством Ω, то $M \models Eq_\Omega$.*

Доказательство Для аксиом (0) это тривиально (и уже отмечалось).

По определению истинности,[1] формула (II) верна в M, если и только если

$$M \models \overrightarrow{m} = \overrightarrow{m'} \to (P(\overrightarrow{m}) \leftrightarrow P(\overrightarrow{m'}))$$

для всех $\overrightarrow{m}, \overrightarrow{m'} \in M^n$. Но последнее утверждение очевидно: в нормальной модели $M \models \overrightarrow{m} = \overrightarrow{m'}$ означает, что $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{m'}$ совпадают; тогда и $|P(\overrightarrow{m})|_M = |P(\overrightarrow{m'})|_M$, а потому $|P(\overrightarrow{m}) \leftrightarrow P(\overrightarrow{m'})|_M = 1$. Следовательно, верна импликация

$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{m'} \to (P(\overrightarrow{m}) \leftrightarrow P(\overrightarrow{m'})).$$

Аналогично рассуждаем для формулы (III):

$$M \models \overrightarrow{m} = \overrightarrow{m'} \to f(\overrightarrow{m}) = f(\overrightarrow{m'}),$$

т.к. из совпадения $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{m'}$ следует совпадение $f_M(\overrightarrow{m})$ и $f_M(\overrightarrow{m'})$. ■

Покажем теперь, как из произвольной модели теории Eq_Ω построить элементарно эквивалентную нормальную модель.

Пусть $M \models Eq_\Omega$. Тогда предикат $=_M$ задает отношение эквивалентности на $\underline{M}$, которое мы обозначим $\approx$. Т.е.

$$m_1 \approx m_2 \ \Leftrightarrow =_M(m_1, m_2) = 1 \ \Leftrightarrow \ M \models m_1 = m_2.$$

Это действительно отношение эквивалентности, благодаря аксиомам Eq. Класс эквивалентности элемента m по $\approx$ обозначим через $\widetilde{m}$.

На фактормножестве $\underline{M}/\approx$ зададим нормальную модель $\widetilde{M}$ сигнатуры Ω следующим образом:

[1] Здесь надо n раз применить условие истинности для формулы вида $\forall x A$

$$\begin{aligned}
&c_{\widetilde{M}} =_{def} \widetilde{c_M},\\
&f^k_{\widetilde{M}}(\widetilde{m_1},\dots,\widetilde{m_k}) =_{def} \widetilde{f^k_M(m_1,\dots,m_k)},\\
&P^k_{\widetilde{M}}(\widetilde{m_1},\dots,\widetilde{m_k}) =_{def} P^k_M(m_1,\dots,m_k)
\end{aligned}$$

(где соответственно, $c \in Const_\Omega,\ f^k \in Fun_\Omega,\ P^k \in Pred_\Omega$).

Лемма 9.4 *(о нормализации)*

(1) $\widetilde{M}$ *корректно определена.*

(2) Для любого терма $t(a_1,\dots,a_k) \in Tm_\Omega$ *и для всех* $m_1,\dots,m_k \in M$

$$|t(\widetilde{m_1},\dots,\widetilde{m_k})|_M = \widetilde{|t(m_1,\dots,m_k)|_M}.$$

(3) Для любой формулы $A(a_1,\dots,a_k) \in Fm_\Omega$ *и для всех* $m_1,\dots,m_k \in M$

$$|A(\widetilde{m_1},\dots,\widetilde{m_k})|_M = |A(m_1,\dots,m_k)|_M.$$

(4) $M \equiv \widetilde{M}$.

Доказательство (1) Надо проверить, что если заменить m_i на эквивалентные элементы, то правые части в определении $f^k_{\widetilde{M}}$ и $P^k_{\widetilde{M}}$ не изменятся.

Действительно, пусть $m_1 \approx m'_1,\dots,m_k \approx m'_k$. Это означает, что $M \vDash m_i = m'_i$ для $i \le k$, и тогда, в обозначениях из леммы 9.3, $M \vDash \overrightarrow{m} = \overrightarrow{m'}$, где $\overrightarrow{m} = (m_1,\dots,m_k)$, $\overrightarrow{m'} = (m'_1,\dots,m'_k)$. Как уже мы видели в лемме 9.3, из аксиомы (II) тогда следует, что $M \vDash f(\overrightarrow{m}) = f(\overrightarrow{m'})$, т.е. $f_M(\overrightarrow{m}) = f_M(\overrightarrow{m'})$ (т.к. модель нормальна).

Аналогично, из аксиомы (III) получаем: $M \vDash P(\overrightarrow{m}) \leftrightarrow P(\overrightarrow{m'})$, т.е. $P_M(\overrightarrow{m}) = P_M(\overrightarrow{m'})$.

(2) Доказательство аналогично лемме 8.1, с тем отличием, что теперь $\varphi : m \mapsto \overrightarrow{m}$ —- не биекция. Однако φ — “сильный гомоморфизм”, т.е. удовлетворает остальным условиям определения изоморфизма (сравните определение 31 и определение $\widetilde{M}$).

(3) Доказательство тоже аналогично лемме 8.1. Оно ведется индукцией по длине A.

Если A — атомарная, то особый случай — когда A имеет вид $m_1 = m_2$. Имеем:

$$M \vDash m_1 = m_2 \Leftrightarrow m_1 \approx m_2 \Leftrightarrow \widetilde{m_1} = \widetilde{m_2} \Leftrightarrow \widetilde{M} \vDash \widetilde{m_1} = \widetilde{m_2}$$

по определению $\approx$ и т.к. $\widetilde{M}$ нормальна.

Случаи логических связок — легкие. Рассмотрим случай $A = \exists x[x/a]B$; запишем A как $A(\overrightarrow{b})$, где $a \notin \overrightarrow{b}$ (как тогда действовать, если $a \notin \overrightarrow{b}$, мы уже знаем). Это соответствует случаю (2.6.1) в доказательстве леммы 8.1.

Проследив это доказательство, мы видим, что все рассуждения можно сохранить и в нашей ситуации (теперь M' заменяется на $\widetilde{M}$). Действительно, биективность φ использовалась там для того, чтобы представить все элементы M' как φ-образы элементов из M, т.е. в этом месте достаточно сюръективности. Но и теперешнее φ сюръективно.

(4) Очевидное следствие (3): для замкнутой A

$$M \vDash A \Leftrightarrow \widetilde{M} \vDash A.$$

■

Теорема 9.5 *Пусть T — теория в сигнатуре с равенством Ω, содержащая Eq_Ω. Предположим, что все нормальные модели T изоморфны (такая теория называется* сильно категоричной*). Тогда T полна.*

Доказательство По лемме 7.3 достаточно доказать, что все модели T элементарно эквивалентны.

Рассмотрим модели $M, M' \vDash T$. По лемме 9.4, $M \equiv \widetilde{M}$, $M' \equiv \widetilde{M'}$. Поэтому $\widetilde{M}, \widetilde{M'} \vDash T$. Т.к. эти модели нормальны, по условию они изоморфны. Следовательно, $\widetilde{M} \equiv \widetilde{M'}$ (теорема 8.2). В итоге имеем $M \equiv M'$.

■

Примеры 1.Теории $Gr + A_{=p}$, где p — простое (лекция 7), сильно категоричны, а потому полны.

2. Если к Gr добавить аксиому коммутативности умножения, получится теория абелевых групп AG. Теория $Gr + A_{=6}$ неполна (почему?), но $AG + A_{=6}$ полна, т.к. сильно категорична: ее модели изоморфны $\mathbf{Z}_6$.

3. Теории LO линейных порядков, кроме стандартных аксиом равенства, содержит аксиомы:

$\forall x\ \neg(x < x)$ (иррефлексивность)

$\forall x \forall y \forall z\ (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$ (транзитивность)

$\forall x \forall y\ (x < y \vee y < x \vee x = y)$ (линейность)

Каждая теория $LO + A_{=n}$ сильно категорична, потому что конечные линейные порядки с данным числом элементов изоморфны.