# Введение в математическую логику (осень 2016)

В.Б. Шехтман

## Лекция 8

### *Определение истинности в модели*

Пусть $M$ — модель сигнатуры $\Omega$; предполагаем, что ее носитель $\underline{M}$ состоит из совершенно новых элементов, которые не являются словами в языке $\Omega$. Через $\Omega \cup M$ обозначим *расширенную сигнатуру модели* $M$, которая получается из $\Omega$ добавлением множества новых констант $\underline{M}$; т.е. $Const_{\Omega \cup M} = Const_{\Omega} \cup \underline{M}$, в остальном же $\Omega \cup M$ не отличается от $\Omega$. [1]

**Определение 33** *Пусть $M$ — модель сигнатуры $\Omega$.* Терм, оцененный в $M$ *— это замкнутый терм расширенной сигнатуры $M$; аналогично,* формула, оцененная в $M$ *— это замкнутая формула сигнатуры $\Omega \cup M$.*

Согласно нашим обозначениям, $CTm_{\Omega \cup M}$ — множество всех термов, оцененных в $M$; а $CFm_{\Omega \cup M}$ — множество всех формул, оцененных в $M$.

**Определение 34** *Для терма $t$, оцененного в модели $M$, индукцией по длине определяется его* значение $|t|_M$*:*

- $|c|_M = c_M$ *для* $c \in Const_{\Omega}$,
- $|m|_M = m$ *для* $m \in \underline{M}$,

[1] Техническое требование, чтобы все элементы из $\underline{M}$ были новыми, нужно для корректности дальнейших определений. Чтобы его обойти, для всех элементов можно ввести “новые имена”, т.е. добавить к $Const_{\Omega}$ не $\underline{M}$, а другое множество, которое находится с ним в биективном соответствии и состоит из новых элементов. Мы не будем этим заниматься.

- $|f(t_1,\ldots,t_n)|_M = f_M(|t_1|_M,\ldots,|t_n|_M)$
  *для* $f^n \in Fun_\Omega$, $t_1,\ldots,t_n \in CTm_{\Omega\cup M}$.

**Определение 35** *Для формулы $C$, оцененной в модели $M$, индукцией по длине определяется ее* значение $|C|_M$*:*

- $|P(t_1,\ldots,t_n)|_M = P_M(|t_1|_M,\ldots,|t_n|_M)$
  *для* $P^n \in Fun_\Omega$, $t_1,\ldots,t_n \in CTm_{\Omega\cup M}$.
- $|A \wedge B|_M = \min(|A|_M, |B|_M)$,
- $|A \vee B|_M = \max(|A|_M, |B|_M)$,
- $|A \to B|_M = \max(1-|A|_M, |B|_M)$,
- $|\neg A|_M = 1-|A|_M$,
- $|\exists x[x/a]A|_M = 1 \Leftrightarrow$ *существует* $m \in \underline{M}$, *такой что* $|[m/a]A|_M = 1$,
- $|\forall x[x/a]A|_M = 1 \Leftrightarrow$ *для всех* $m \in \underline{M}$, $\quad |[m/a]A|_M = 1$,

Здесь $[m/a]A$ обозначает оцененную формулу, полученную из $A$ заменой всех вхождений $a$ на $m$.[2]

Заметим, что последние 2 пункта определения можно записать и так:

$$|\exists x[x/a]A|_M = \max_{m\in\underline{M}} |[m/a]A|_M,$$

$$|\forall x[x/a]A|_M = \min_{m\in\underline{M}} |[m/a]A|_M.$$

Как и в логике высказываний (леммы 2.1, 2.2), прежде, чем пользоваться этим определением, необходимо доказать его *корректность*. Мы отложим это доказательство до начала следующей лекции.

Пример 1 Рассмотрим *сигнатуру колец*, содержащую равенство $(=)$, константы $0, 1$ и функциональные символы: $\cdot, +$ (2-местные).

В термах записываем их привычным образом: $t_1 \cdot t_2,\ t_1 + t_2$.

Рассмотрим формулу $\exists x(x\cdot x = 1+1)$ в моделях $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}$ (с обычным пониманием нуля, единицы, сложения и умножения). Имеем:

$$\mathbf{R} \vDash \exists x(x\cdot x = 1+1),$$

т.к.

$$\mathbf{R} \vDash \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 1+1.$$

[2] Строго говоря, надо доказывать, что это — действительно формула; доказательство рутинное, по индукции. В определении 35 предполагается, что формула $\forall x[x/a]A$ замкнута, поэтому $A$ не может содержать никаких свободных переменных, кроме $a$. И тогда $[m/a]A$ снова оказывается замкнутой.

Отметим, что здесь возникает оцененная формула $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 1+1$, с константами двух видов: 1 берется из исходной сигнатуры, а $\sqrt{2}$ — из модели; в сигнатуре колец такого символа нет.

С другой стороны,

$$\mathbf{Q} \models \neg\exists x(x\cdot x = 1+1),$$

т.к.

$$\mathbf{Q} \not\models r\cdot r = 1+1$$

для всех $r \in \mathbf{Q}$.

## *Определимые предикаты*

**Определение 36** *$k$-местный предикат на множестве $M$ — это отображение $M^k \longrightarrow \{0,1\}$. $k$-местное отношение на множестве $M$ — это подмножество множества $M^k$.*

Любому $k$-местному отношению $R \subseteq M^k$ соответствует $k$-местный предикат — его характеристическая функция $\gamma : M^k \longrightarrow \{0,1\}$:

$$\gamma(m_1,\ldots,m_k) = \begin{cases} 1, \text{ если } (m_1,\ldots,m_k)\in R, \\ 0 \text{ иначе }. \end{cases}$$

И наоборот, предикату $\gamma : M^k \longrightarrow \{0,1\}$ соответствует отношение

$$R = \{(m_1,\ldots,m_k) \mid \gamma(m_1,\ldots,m_k) = 1\}.$$

В частности, при $k = 1$: подмножествам $M$ соответствуют одноместные предикаты на $M$.

**Определение 37** Параметрами *формулы (некоторой сигнатуры) называются входящие в нее свободные переменные. $FV(A)$ обозначает множество всех параметров формулы $A$.*

Формулу $A$ мы записываем в виде $A(b_1,\ldots,b_k)$, если хотим отметить, что $FV(A) \subseteq \{b_1,\ldots,b_k\}$. При этом некоторые $b_i$ могут и не встречаться в $A$.

Аналогичную терминологию и обозначения применяем для термов; разница лишь в том, что в термах могут встречаться только свободные переменные. Т.е. параметры терма $t$ — это все входящие в него переменные; их множество обозначается $FV(t)$. Запись $t(b_1,\ldots,b_k)$ означает, что $FV(t) \subseteq \{b_1,\ldots,b_k\}$.

**Определение 38** $k$-местный предикат, определимый формулой $A(b_1, \ldots, b_k)$ в модели $M$ *— это* $A_M : \underline{M}^k \longrightarrow \{0,1\}$*, такой что для всех* $m_1, \ldots, m_k$

$$A_M(m_1, \ldots, m_k) = |[m_1, \ldots, m_k/b_1, \ldots, b_k]A|_M.$$

Здесь использовано обозначение многократной подстановки:

$$[m_1, \ldots, m_k/b_1, \ldots, b_k]A =_{def} [m_1/b_1] \ldots [m_k/b_k]A.$$

Примеры Рассмотрим опять сигнатуру колец и ее модель $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел с обычными сложением, умножением, нулем и единицей. Рассмотрим в этой модели 2-местный предикат $m_1 \leq m_2$. Он определим формулой $\exists x(b_1 + x = b_2)$:

$$\mathbf{N} \vDash \exists x(m_1 + x = m_2) \Leftrightarrow m_1 \leq m_2.$$

В этой формуле используется только сложение, поэтому определимость сохранится и для более бедной сигнатуры, в которой есть только $+$ и $=$.

Для того, чтобы задать порядок на множестве действительных чисел $\mathbf{R}$, сложения уже не хватит, т.е. в $\mathbf{R}$ как модели сигнатуры $\{+,=\}$ предикат $m_1 \leq m_2$ не определим — это будет обсуждаться позже. Но легко доказать определимость в сигнатуре колец:

$$\mathbf{R} \vDash \exists x(m_1 + x \cdot x = m_2) \Leftrightarrow m_1 \leq m_2.$$

## *Что происходит со значениями термов и формул при изоморфизме*

**Лемма 8.1** *Пусть* $M, M'$ *— модели сигнатуры* $\Omega$*,* $\varphi : M \cong M'$*.*

*(1) Если* $t(b_1, \ldots, b_k) \in Tm_\Omega$*, то*

$$\varphi(|[m_1, \ldots, m_k/b_1, \ldots, b_k]t|_M) = |[\varphi(m_1), \ldots, \varphi(m_k)/b_1, \ldots, b_k]t|_{M'},$$

*или, в упрощенной записи:*

$$\varphi(|t(m_1, \ldots, m_k)|_M) = |t(\varphi(m_1), \ldots, \varphi(m_k))|_{M'}.$$

*(2) Если* $A(b_1, \ldots, b_k) \in Fm_\Omega$*, то*

$$|[m_1, \ldots, m_k/b_1, \ldots, b_k]A|_M = |[\varphi(m_1), \ldots, \varphi(m_k)/b_1, \ldots, b_k]A|_{M'},$$

*или, в упрощенной записи:*

$$|A(m_1, \dots, m_k)|_M = |A(\varphi(m_1), \dots, \varphi(m_k))|_{M'}.$$

**Доказательство** Еще упростим обозначения: пишем $\overrightarrow{m}$ вместо $m_1, \dots, m_k$ и $\varphi\overrightarrow{m}$ — вместо $\varphi(m_1), \dots, \varphi(m_k)$.

(1) Рассуждаем индукцией по длине $t$. Возможны 3 случая.

(1.1) (базис индукции). $t = b_i$.

Тогда

$$t(\overrightarrow{m}) = [m_i/b_i]b_i = m_i, \ |t(\overrightarrow{m})|_M = [m_i|_M = m_i$$

(определение значений термов, опр. 35); аналогично,

$$t(\varphi\overrightarrow{m}) = \varphi(m_i), \ |t(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'} = [\varphi(m_i)|_{M'} = \varphi(m_i).$$

Утверждение (1) очевидно.

(1.2) (базис индукции). $t = c$, $c \in Const_\Omega$.

Тогда $t$ не содержит переменных, и $t(\overrightarrow{m}) = t(\varphi\overrightarrow{m}) = c$. По определению 35,

$$|t(\overrightarrow{m})|_M = c_M, \ |t(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'} = c_{M'}.$$

Равенство (1) превращается в

$$\varphi(c_M) = c_{M'},$$

а это верно по определению изоморфизма (опр. 31)

(1.3) (шаг индукции). $t = f(t_1, \dots, t_n)$ для функционального символа $f^n$ и термов $t_1, \dots, t_n$. Тогда

$$t(\overrightarrow{m}) = f(t_1(\overrightarrow{m}), \dots, t_n(\overrightarrow{m})),$$

$$(*) \qquad |t(\overrightarrow{m})|_M = f_M(|t_1(\overrightarrow{m})|_M, \dots, |t_n(\overrightarrow{m})|_M)$$

(опр. 35). Аналогично,

$$t(\varphi\overrightarrow{m}) = f(t_1(\varphi\overrightarrow{m}), \dots, t_n(\varphi\overrightarrow{m})),$$

откуда, по опр. 35 и предположению индукции,

$$(**) \ |t(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'} = f_{M'}(|t_1(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'}, \dots, |t_n(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'}) = f_{M'}(\varphi(|t_1(\overrightarrow{m})|_M), \dots, \varphi(|t_n(\overrightarrow{m})|_M)).$$

Но, по определению изоморфизма,

$$(***) \ f_{M'}(\varphi(|t_1(\overrightarrow{m})|_M), \dots, \varphi(|t_n(\overrightarrow{m})|_M)) = \varphi(f_M(|t_1(\overrightarrow{m})|_M, \dots, |t_n(\overrightarrow{m})|_M)).$$

Теперь из (**),(***), и (*) получаем:

$$|t(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'} = \varphi(|t(\overrightarrow{m})|_M).$$

(2) Применяем индукцию по числу логических связок и кванторов в $A$.

(2.1) (базис индукции) $A = P(t_1,\ldots,t_n)$ — атомарная ($P^n \in Pred_\Omega$, $t_1,\ldots,t_n \in Tm_\Omega$).

Доказательство — почти такое же, как в случае (1.3).

$$A(\overrightarrow{m}) = P(t_1(\overrightarrow{m}),\ldots,t_n(\overrightarrow{m})),$$

$$(*) \qquad |A(\overrightarrow{m})|_M = P_M(|t_1(\overrightarrow{m})|_M,\ldots,|t_n(\overrightarrow{m})|_M)$$

(опр. 35). Аналогично,

$$|A(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'} = P_{M'}(|t_1(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'},\ldots,|t_n(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'})$$

откуда

$$(**) \qquad |A(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'} = P_{M'}(\varphi(|t_1(\overrightarrow{m})|_M),\ldots,\varphi(|t_n(\overrightarrow{m})|_M)),$$

ввиду (1). Но, по определению изоморфизма,

$$(***)\ P_{M'}(\varphi(|t_1(\overrightarrow{m})|_M),\ldots,\varphi(|t_n(\overrightarrow{m})|_M)) = P_M(|t_1(\overrightarrow{m})|_M,\ldots,|t_n(\overrightarrow{m})|_M)).$$

Теперь из (**),(***), и (*) получаем:

$$|A(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'} = |A(\overrightarrow{m})|_M.$$

(2.2) $A = (B \wedge C)$. В этом случае, по определению истинности

$$|A(\overrightarrow{m})|_M = min(|B(\overrightarrow{m})|_M, |C(\overrightarrow{m})|_M),$$

$$|A(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'} = min(|B(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'}, |C(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'}).$$

Но, по предположению индукции,

$$|B(\overrightarrow{m})|_M = |B(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'},\ |C(\overrightarrow{m})|_M = |C(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'},$$

а потому и

$$|A(\overrightarrow{m})|_M = |A(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'}.$$

(2.3) $A = (B \vee C)$, (2.4) $A = (B \to C)$, (2.5) $A = \neg B$.

Эти случаи аналогичны (2.2), и мы их пропускаем.

(2.6) $A = \exists x[x/a]B$.

Вспомним, что в формулировке (2) имеется $\overrightarrow{b}$ — список, *содержащий* все параметры $A$. Переменная $a$, конечно же, не входит в $A$, но случайно может оказаться в этом списке $\overrightarrow{b}$. Поэтому разбираем два случая.

(2.6.1) $a$ не входит в $\overrightarrow{b}$.

Заметим, что $B$ содержит те же параметры, что и $A$, и еще, возможно, $a$. Поэтому мы можем записать $B$ как $B(\overrightarrow{b}, a)$. Заменив $\overrightarrow{b}$ на $\overrightarrow{m}$ в формуле $A$, получаем:

$$A(\overrightarrow{m}) = \exists x[x/a]B(\overrightarrow{m}, a)$$

Теперь, по определению истинности,

$$|A(\overrightarrow{m})|_M = \max_{q \in M} |B(\overrightarrow{m}, q)|_M,$$

и аналогично,

$$(*) \qquad |A(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'} = \max_{q' \in M'} |B(\varphi\overrightarrow{m}, q')|_{M'},$$

По предположению индукции, для формулы $B(\overrightarrow{b}, a)$ имеем:

$$|B(\overrightarrow{m}, q)|_M = |B(\varphi\overrightarrow{m}, \varphi(q))|_{M'}.$$

Поэтому

$$|A(\overrightarrow{m})|_M = \max_{q \in M} |B(\varphi\overrightarrow{m}, \varphi(q))|_{M'}.$$

Но $\varphi$ — биекция, поэтому все элементы из $M'$ записываются как $\varphi(q)$, где $q \in M$. Тогда

$$|A(\overrightarrow{m})|_M = \max_{q' \in M'} |B(\varphi\overrightarrow{m}, q')|_{M'} = |A(\varphi\overrightarrow{m})|_{M'}$$

— по (*).

(2.6.2) $a$ входит в $\overrightarrow{b}$.

Удалим $a$ из $\overrightarrow{b}$; полученный список переменных обозначим $\overrightarrow{b}^-$. Как мы уже заметили, $a$ не входит в $A$, поэтому для оцененной формулы $A(\overrightarrow{m})$ имеем:

$$A(\overrightarrow{m}) = [\overrightarrow{m}/\overrightarrow{b}]A = [\overrightarrow{m}^-/\overrightarrow{b}^-]A.$$

Здесь $\overrightarrow{m}^-$ получается из $\overrightarrow{m}$ удалением $i$-го элемента, если $a = b_i$.

Теперь для $\overrightarrow{m}^-$ и $\overrightarrow{b}^-$ можно использовать случай (2.6.1):

$$|[\overrightarrow{m}^-/\overrightarrow{b}^-]A|_M = |[\varphi\overrightarrow{m}^-/\overrightarrow{b}^-]A|_{M'}.$$

И опять же, поскольку $a$ не входит в $A$,

$$[\varphi\overrightarrow{m}^-/\overrightarrow{b}^-]A = [\varphi\overrightarrow{m}/\overrightarrow{b}]A.$$

В итоге снова получаем

$$|[\overrightarrow{m}/\overrightarrow{b}]A|_M = |[\varphi\overrightarrow{m}/\overrightarrow{b}]A|_{M'},$$

что и требовалось.

(2.7) $A = \forall x[x/a]B$.

Этот случай совершенно аналогичен (2.6); max заменяется на min. ■

**Теорема 8.2** *Если $M \cong M'$, то $M \equiv M'$.*

**Доказательство** Пусть $M, M'$ — изоморфные модели сигнатуры $\Omega$. Если $A$ — замкнутая формула данной сигнатуры, можно применить лемму 8.1 с пустым списком параметров ($k = 0$):

$$|A|_M = |A|_{M'},$$

или

$$M \vDash A \Leftrightarrow M' \vDash A.$$

Это выполняется для любой замкнутой $A$, а потому $Th(M) = Th(M')$, т.е. $M \equiv M'$. ■