Введение в математическую логику (осень 2016)

В.Б. Шехтман

Лекция 7

Языки первого порядка: семантика (продолжение)

На прошлой лекции было дано определение значений замкнутых термов в модели (определение 22). Корректность этого определения получается из следующей леммы:

Лемма 7.1 *Пусть M — модель сигнатуры Ω. Значения замкнутых термов в M определены корректно. Это означает, что существует единственное отображение $t \mapsto |t|_M$ из CTm_Ω в $\underline{M}$, удовлетворяющее условиям из определения 22:*

- $|c|_M = c_M$ *для* $c \in Const_\Omega$,
- $|f(t_1, \ldots, t_n)|_M = f_M(|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M)$
  для $f^n \in Fun_\Omega$, $t_1, \ldots, t_n \in CTm_\Omega$.

Доказательство Аналогично лемме 2.1. Индукцией по длине t доказываем, что $|t|_M$ определяется однозначно.

Базис индукции: если t — константа, то все очевидно.

Шаг индукции. По лемме 6.3, $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ для единственного функционального символа f и термов $t_1, \ldots, t_n$. По предположению индукции, $|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M$ определены однозначно, и тогда $|t|_M = f_M(|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M)$ тоже задается однозначно. ■

Определение 23 *Формула, не содержащая свободных переменных, называется* замкнутой, *или* предложением.

Таким образом, замкнутая атомарная формула имеет вид $P^n(t_1, \dots, t_n)$, где $t_1, \dots, t_n$ — замкнутые термы.

Для сигнатуры Ω множество всех замкнутых формул обозначается CFm_Ω.

Определение 24 *Для замкнутой атомарной формулы сигнатуры Ω ее* значение в модели M *той же сигнатуры определяется так:*

$$|P(t_1, \dots, t_n)|_M = P_M(|t_1|_M, \dots, |t_n|_M)$$

(где $P^n \in Pred_\Omega$, $t_1, \dots, t_n \in CTm_\Omega$).

Лемма 7.2 *Значения замкнутых атомарных формул в модели определены однозначно.*

Доказательство Очевидное следствие леммы **??**. ∎

Значение произвольной замкнутой формулы в модели определяется по индукции; это определение отражает интуитивное понимание связок и кванторов. Точная формулировка его будет дана в лекции 8, а пока отметим лишь, что для связок $\vee, \wedge, \neg$ определение аналогично логике высказываний. Т.е. $|A \wedge B| = \min(|A|, |B|)$, $|\neg A| = 1 - |A|$ и т.д.

Модели формул и теорий

Определение 25 *Пусть M — модель сигнатуры Ω, A — замкнутая формула сигнатуры Ω. Говорят, что A* истинна *(или* выполнима*) в M, если $|A|_M = 1$. В этом случае также говорят, что M —* модель *A и пишут $M \vDash A$.*

Формула называется выполнимой*, если она имеет модель;* общезначимой *— если она истинна во всех моделях данной сигнатуры.*

Определение 26 *Теорией первого порядка в сигнатуре Ω называется любое множество замкнутых формул этой сигнатуры; элементы теории называются также ее* аксиомами*.*

Говорят, что теория T выполнима *в модели M, или что M —* модель *T, и пишут $M \vDash T$, если все формулы из T истинны в M.*

Теория называется выполнимой *(или* совместной*), если она имеет модель.*

Пример 1 Рассмотрим *сигнатуру равенства.* В ней единственный 2-местный предикатный символ “=” (равенство) и нет ни констант, ни функциональных символов. *Чистая теория равенства* (которую мы обозначим Eq) содержит 3 аксиомы:

$$\forall x(x = x),$$
$$\forall x \forall y(x = y \to y = x),$$
$$\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \to x = z).$$

Всякая модель сигнатуры равенства — это непустое множество с произвольным 2-местным предикатом $=_M$. Если же $M \models Eq$, то предикат $=_M$ должен быть рефлексивным, симметричным и транзитивным (такой предикат называется *эквивалентностью*).

Модель M сигнатуры равенства называется *нормальной*, если для всех $m_1, m_2 \in M$

$$=_M (m_1, m_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } m_1, m_2 \text{ совпадают,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что в любой нормальной модели истинны все аксиомы Eq.

Определение 27 *Пусть T — теория, A — замкнутая формула в ее сигнатуре. Говорят, что A* логически *(или* семантически*)* следует из T *(обозначение: $T \models A$), если A истинна во всех моделях T.*

Очевидны следующие свойства:
1. Если T не выполнима, то $T \models A$ для всех A.
2. $T \not\models A \Leftrightarrow T \cup \{\neg A\}$ выполнима.

Для каждой теории T можно рассмотреть класс всех ее моделей[1]; он обозначается $Mod(T)$.

Определение 28 *Теории T_1, T_2 одной сигнатуры называются* эквивалентными (равносильными)*, если у них одни и те же модели, т.е. $Mod(T_1) = Mod(T_2)$; обозначение: $T_1 \sim T_2$.*

Двойственным образом, по модели строится теория:

Определение 29 *Элементарной теорией модели M называется множество всех замкнутых формул в ее сигнатуре, истинных в M; обозначение: $Th(M)$. Модели M_1, M_2 одной сигнатуры называются* элемен-

[1] Неформально говоря, классы — это “большие множества”. Различие классов и множеств для нас сейчас не важно.

тарно эквивалентными*, если в них истинны одни и те же предложения, т.е.* $Th(M_1) = Th(M_2)$*; обозначение:* $M_1 \equiv M_2$.

Определение 30 *Теория называется* полной*, если для любой замкнутой формулы* A *в ее сигнатуре хотя бы одна из формул* A, $\neg A$ *логически следует из* T.

Очевидно, что всякая несовместная теория полна: из нее следуют все формулы той же сигнатуры. Если же теория совместна и полна, то либо $T \models A$, либо $T \models \neg A$, но не одновременно: в модели не могут быть истинны и A, и $\neg A$.

Пример 2 Чистая теория равенства Eq неполна. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим формулу

$$A_{=1} =_{def} \forall x \forall y (x = y).$$

Заметим, что в нормальной модели

$$M \models A_{=1} \Leftrightarrow |M| = 1$$

(где $|M|$ — мощность модели M, т.е. мощность ее носителя). Поэтому

- $Eq \not\models \neg A_{=1}$ — т.к. теория $Eq \cup \{A_{=1}\}$ выполнима: у нее есть 1-элементная нормальная модель.
- $Eq \not\models A_{=1}$ — т.к. теория $Eq \cup \{\neg A_{=1}\}$ выполнима: у нее есть (например) 10-элементная нормальная модель.

Пример 3 Теория $Eq \cup \{A_{=1}\}$ полна. Аккуратно это утверждение мы докажем позже (см. лекцию 9), но интуитивно оно понятно: все нормальные модели этой теории одноэлементны и потому они не отличимы никакими формулами. А ненормальные модели можно не учитывать.

Точно так же теория $Eq \cup \{A_{=2}\}$ полна, где формула $A_{=2}$ утверждает, что в нормальной модели ровно 2 элемента. Ее можно построить как конъюнкцию $A_{\geq 2} \wedge A_{\leq 2}$, где

$$A_{\geq 2} =_{def} \exists x \exists y \neg (x = y),$$

$$A_{\leq 2} =_{def} \forall x \forall y \forall z (x = y \vee y = z \vee x = z).$$

Тогда для нормальной M

$$M \models A_{\geq 2} \Leftrightarrow |M| \geq 2,$$

$$M \models A_{\leq 2} \Leftrightarrow |M| \leq 2,$$

и следовательно,

$$M \models A_{=2} \Leftrightarrow |M| = 2.$$

Аналогичным образом строятся формулы $A_{\geq n},\ A_{\leq n}, A_{=n}$ и полные теории $Eq \cup \{A_{=n}\}$ для всех натуральных $n > 0$.

Лемма 7.3

(1) Теория T полна $\Leftrightarrow$ все модели T элементарно эквивалентны.

(2) Теория T полна $\Leftrightarrow$ для любой выполнимой теории $T' \supseteq T$ (той же сигнатуры) $T' \sim T$.

Утверждение (2) означает, что к полной теории нельзя добавить существенно новых аксиом: получится либо эквивалентная, либо невыполнимая теория.

Доказательство Во всех случаях рассуждаем от противного.

(1) ($\Rightarrow$).

Пусть $M, M' \vDash T$, но $M \not\equiv M'$. Тогда для некоторой замкнутой формулы A, $M \vDash A$, $M' \nvDash A$ (т.е. $M' \vDash \neg A$).

Но это означает, что обе теории $T \cup \{A\}$, $T \cup \{\neg A\}$ выполнимы. А тогда $T \nvDash \neg A$, $T \nvDash A$, а потому T неполна.

($\Leftarrow$).

Допустим, что T неполна. Тогда $T \nvDash \neg A$, $T \nvDash A$ для какой-то замкнутой A. Отсюда следует, что теории $T \cup \{A\}$, $T \cup \{\neg A\}$ выполнимы.

Взяв $M_1 \vDash T \cup \{A\}$, $M_2 \vDash T \cup \{\neg A\}$, получаем не элементарно эквивалентные модели T.

(2) ($\Rightarrow$).

Пусть, напротив, $T' \supseteq T$, T' выполнима, но $T' \nsim T$. Из $T' \supseteq T$ следует, что все модели T' являются моделями T, а из $T' \nsim T$ — что найдется модель $M \vDash T$, такая что $M \nvDash T'$.

$M \nvDash T'$ означает, что имеется замкнутая формула $A \in T'$, для которой $M \nvDash A$. Значит, $T \nvDash A$ — поскольку $M \vDash T$.

Одновременно $T \nvDash \neg A$. Действительно, если бы $T \vDash \neg A$, то и подавно $T' \vDash \neg A$ (т.к. все модели T' являются моделями T). Но тогда получается, что во всех моделях T' верны обе формулы $\neg A$ и A (которая входит в T'). Это противоречит выполнимости T'.

Таким образом, $T \nvDash \neg A$, $T \nvDash A$, и T неполна.

($\Leftarrow$).

Если T неполна, то $T \nvDash \neg A$, $T \nvDash A$ для некоторой замкнутой A. Отсюда (как в доказательстве (1) ($\Leftarrow$)) получаем выполнимые теории $T \cup \{A\}$, $T \cup \{\neg A\}$ и модели $M_1 \vDash T \cup \{A\}$, $M_2 \vDash T \cup \{\neg A\}$.

Тогда теория $T' = T \cup \{A\}$ содержит T и выполнима. Но T имеет модель M_2, которая не является моделью T' (т.к. $M_2 \vDash \neg A$). Поэтому $T' \nsim T$. ■

Пример 4 Рассмотрим *сигнатуру групп*, содержащую равенство ($=$), константу e ("единица"), функциональные символы: $\cdot$ (2-местный, "умножение"), $^{-1}$ (1-местный, "обращение").

Используем привычную запись: $t_1 \cdot t_2,\ t^{-1}$.

Рассмотрим в этой сигнатуре *теорию групп* Gr со следующими аксиомами.

I. Аксиомы равенства. Это аксиомы Eq, а также

$$\forall x \forall x' \forall y \forall y' (x = x' \wedge y = y' \to x \cdot y = x' \cdot y').$$

$$\forall x \forall y (x = y \to x^{-1} = y^{-1}).$$

II. Аксиомы групп.

$$\forall x \forall y \forall z (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

$$\forall x ((x \cdot e = x) \wedge (e \cdot x = x)).$$

$$\forall x ((x \cdot x^{-1} = e) \wedge (x^{-1} \cdot x = e)).$$

Ясно, что модели этой теории — в точности группы (с единицей и операциями умножения и обращения).

Верны следующие факты (точное доказательство будет обсуждаться позже):

1. Теория $Gr + A_{=1}$ полна: все 1-элементные группы изоморфны, а потому неотличимы.

2. По той же причине полны теории $Gr + A_{=2}$, $Gr + A_{=3}$.

3. Теория $Gr + A_{=4}$ неполна: у нее есть не элементарно эквивалентные модели $\mathbf{Z}_4$ и $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$. Чтобы их отличить, можно рассмотреть формулу $\forall x (x \cdot x = e)$.

Изоморфизмы

Определим теперь точно, какие модели будут считаться “одинаковыми”.

Определение 31 *Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω. Отображение $\varphi : \underline{M} \longrightarrow \underline{M'}$ называется* изоморфизмом M на M', *если*

- φ *— биекция,*
- $\varphi(c_M) = c_{M'}$ *для всех* $c \in Const_\Omega$,
- $\varphi(f_M(m_1, \ldots, m_k)) = f_{M'}(\varphi(m_1), \ldots, \varphi(m_k))$ *для всех* $f^k \in Fun_\Omega$ *и* $m_1, \ldots, m_k \in \underline{M}$,
- $P_M(m_1, \ldots, m_k) = P_{M'}(\varphi(m_1), \ldots, \varphi(m_k))$ *для всех* $P^k \in Fun_\Omega$ *и* $m_1, \ldots, m_k \in \underline{M}$.

Если говорить не совсем строго, изоморфизм сохраняет значения всех констант, предикатов и функций из нашей сигнатуры.

Запись $\varphi : M \cong M'$ означает, что φ — изоморфизм M на M'.

Лемма 7.4

(1) Если $\varphi : M \cong M'$ и $\psi : M' \cong M''$, то $\psi\varphi : M \cong M''$ ($\psi\varphi$ обозначает композицию).

(2) Если $\varphi : M \cong M'$, то $\varphi^{-1} : M' \cong M$.

Доказательство проводится непосредственной проверкой (упражнение).

Определение 32 *Модели M, M' называются* изоморфными *(обозначение: $M \cong M'$), если существует изоморфизм $\varphi : M \cong M'$.*

Очевидно, что $M \cong M$, а из леммы **??** получаем, что изоморфность моделей также обладает свойствами симметричности и транзитивности, т.е. $\cong$ задает отношение эквивалентности на классе всех моделей данной сигнатуры.

Понятно, что изоморфные модели должны быть элементарно эквивалентны; точное доказательство будет дано на следующей лекции.