Введение в математическую логику (осень 2016)

В.Б. Шехтман

Лекция 6

Теорема о полноте CL (окончание)

Лемма 6.1 *Для конечного множества формул Γ и формулы A*

$$\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \bigwedge \Gamma \vdash A \Leftrightarrow \vdash \bigwedge \Gamma \to A$$

Доказательство Вторая эквивалентность следует из теоремы о дедукции. Докажем первую.

Заметим, что $\Gamma \vdash \bigwedge \Gamma$ — по допустимому правилу $\dfrac{A, B}{A \wedge B}$, которое надо применить несколько раз.

И наоборот, $\bigwedge \Gamma \vdash \Gamma$, т.е. все формулы Γ выводятся из $\bigwedge \Gamma$. Действительно, если $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$, то из ассоциативности и коммутативности для конъюнкции в CL, для каждого A_i имеем:

$$\vdash (\bigwedge \Gamma \to A_i \wedge B) \wedge (A_i \wedge B \to \bigwedge \Gamma).$$

где $B = \bigwedge_{j \neq i} A_j$. По аксиомам 3,4, из этой конъюнкции следует каждая импликация в отдельности, поэтому (по MP)

$$\vdash \bigwedge \Gamma \to A_i \wedge B.$$

Снова по аксиоме 3,

$$\vdash A_i \wedge B \to A_i,$$

и тогда, по правилу силлогизма,

$$\vdash \bigwedge \Gamma \to A_i.$$

Теперь, предположив $\Gamma \vdash A$, из $\bigwedge \Gamma \vdash \Gamma$ получаем по транзитивности выводимости (лекция 5) $\bigwedge \Gamma \vdash A$.

Аналогично, предположив $\bigwedge \Gamma \vdash A$, из $\Gamma \vdash \bigwedge \Gamma$ по транзитивности выводимости получим $\bigwedge \Gamma \vdash A$. ■

Теорема 6.2 *Для конечного множества формул Γ и формулы A*

$$\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \Gamma \models A.$$

Доказательство Утверждение “$\Rightarrow$” уже доказано (лекция 4).

Докажем “$\Leftarrow$”. Для этого заметим сначала, что из $\Gamma \models A$ следует $\models \bigwedge \Gamma \to A$. Действительно, пусть $\Gamma \models A$. Ясно, что для любой оценки f, если $f(\bigwedge \Gamma) = 1$, то $f(B) = 1$ для всех $B \in \Gamma$. Но тогда и $f(A) = 1$ (так как $\Gamma \models A$). Значит, $f(\bigwedge \Gamma \to A) = 1$. Итак, формула $\bigwedge \Gamma \to A$ истинна при всех оценках, т.е. общезначима.

По теореме полноты (лекция 5), из $\models \bigwedge \Gamma \to A$ следует $\vdash \bigwedge \Gamma \to A$, откуда получаем $\Gamma \vdash A$ по лемме 6.1. ■

Замечание Теорема 6.2 верна и для бесконечного Γ. Этот случай сводится к конечному, благодаря свойству *компактности логического следования*: если $\Gamma \models A$, то $\Gamma_1 \models A$ для некоторого конечного $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$. Последнее свойство в нашем курсе не доказывается; оно еще будет обсуждаться для логики первого порядка.

Языки первого порядка: синтаксис

Отличия языка 1-го порядка от языка логики высказываний:

- Вместо пропозициональных переменных используются атомарные формулы.
- Для индуктивного построения формул, кроме логических связок, применяются кванторы.

Определение 16 Сигнатурой (первого порядка) *называется четверка вида $\Omega = (Pred_\Omega, Const_\Omega, Fun_\Omega, \nu)$, в которой*

- $Pred_\Omega, Const_\Omega, Fun_\Omega$ *— попарно не пересекающиеся множества,*
- $Pred_\Omega \neq \varnothing$,
- $\nu : Pred_\Omega \cup Fun_\Omega \longrightarrow \mathbf{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$.

Множества $Pred_\Omega, Const_\Omega, Fun_\Omega$ *называются соответственно множеством* предикатных символов, *множеством* (предметных) констант *и множеством* функциональных символов *сигнатуры* Ω. ν *называется* функцией валентности.

Предикатный или функциональный символ G *называется* n-местным (n-арным), *если* $\nu(G) = n$. *Чтобы это подчеркнуть, его обозначают* G^n.

Определение 17 *Алфавит языка первого порядка сигнатуры* Ω *состоит из*

- *всех предикатных символов, констант и функциональных символов* Ω*;*
- *счетного множества свободных (предметных) переменных* $FVar = \{a_0, a_1, \ldots\}$*;*
- *счетного множества связанных (предметных) переменных* $BVar = \{v_0, v_1, \ldots\}$*;*
- *логических связок:* $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$*;*
- *кванторов:* $\forall, \exists$*;*
- *технических символов: (,) (скобки), “,” (запятая).*

Предполагаем, что все эти множества попарно не пересекаются.

Как правило, для обозначения свободных переменных мы будем использовать $a, b, c, \ldots$ вместо символов a_i, а для связанных — $x, y, z, \ldots$ вместо v_i.

Язык первого порядка данной сигнатуры состоит из двух видов слов в этом алфавите: термов и формул.

Определение 18 Термы сигнатуры Ω *строятся индуктивно:*

- *все константы — термы,*
- *все свободные переменные — термы,*
- *если* $f^n \in Fun_\Omega$ *и* $t_1, \ldots, t_n$ *— термы, то* $f(t_1, \ldots, t_n)$ *— терм.*

Таким образом, мы индукцией по длине слова, определяем, какие слова считаются термами.

Это определение можно сформулировать иначе:

Множество термов сигнатуры Ω — это наименьшее множество слов X, такое что

- $Const_\Omega \subseteq X$,
- $FVar \subseteq X$,

- если $f^n \in Fun_\Omega$ и $t_1, \dots, t_n \in X$, то $f(t_1, \dots, t_n) \in X$.

Определение 19 Атомарные формулы сигнатуры Ω *— это слова вида* $P(t_1, \dots, t_n)$*, где* $P^n \in Pred_\Omega$*, а* $t_1, \dots, t_n$ *— термы сигнатуры* Ω.

Определение 20 Формулы сигнатуры Ω *строятся индуктивно:*

- *все атомарные формулы являются формулами;*
- *если* A, B *— формулы, то* $(A \wedge B)$ *— формула;*
- *если* A, B *— формулы, то* $(A \vee B)$ *— формула;*
- *если* A, B *— формулы, то* $(A \to B)$ *— формула;*
- *если* A *— формула, то* $\neg A$ *— формула;*
- *если* A *— формула,* $a \in FVar$*,* $x \in BVar$ *и* x *не входит в* A*, то* $\exists x[x/a]A$ *— формула;*
- *если* A *— формула,* $a \in FVar$*,* $x \in BVar$ *и* x *не входит в* A*, то* $\forall x[x/a]A$ *— формула.*

В этом определении запись $[x/a]A$ *означает результат замены всех вхождений переменной* a *в* A *на переменную* x *(в частности,* $[x/a]A = A$*, если* a *не входит в* A*).*

Заметим, что в любой формуле кванторы по одной и той же переменной могут встречаться только в непересекающихся подформулах. Например, если $P^2 \in Pred_\Omega$ и $x, y \in BVar$, то

$$\exists x \exists y\, P(x, y) \wedge \exists x \neg P(x, x)$$

— формула, а

$$\exists x (\exists y P(x, y) \wedge \neg \exists x P(x, x))$$

— не формула.

Обозначения (для сигнатуры Ω):

Tm_Ω — множество всех термов,

Fm_Ω — множество всех формул,

AFm_Ω — множество всех атомарных формул.

Замечание Существуют и другие варианты определения формулы. Самый распространенный вариант: свободные и связанные переменные не различаются, а кванторы применяются без ограничений. Такое определение формулы проще, но при этом варианте усложняется формулировка исчисления предикатов.

При более экзотическом варианте определения связанные переменные исчезают, а вместо них появляются пустые окошки, которые соединяются связями со своими кванторами. Похожее определение используется в "Теории множеств" Бурбаки.

Пример Рассмотрим сигнатуру колец (или сигнатуру арифметики). В ней имеются константы 0,1, предикатный символ $=^2$, и функциональные символы $+^2$, $\cdot^2$.

Атомарные формулы имеют вид $=(t_1, t_2)$, что мы будем записывать более привычным образом: $(t_1 = t_2)$. Аналогично, термы $+(t_1, t_2)$, $\cdot(t_1, t_2)$ записываются как $(t_1 + t_2)$, $(t_1 \cdot t_2)$.

В этой сигнатуре можно написать формулу

$$\exists x((x + x) = a),$$

которая означает, что a — четное число (если речь идет о натуральных или целых числах).

Для коммутативных колец формула

$$\neg(a = 0) \wedge \exists x((x \cdot a) = 0) \wedge \neg(x = 0))$$

означает, что a — делитель нуля, а формула

$$\exists x((x \cdot a) = 1)$$

— что a обратим.

С другой стороны, нельзя построить формулу, которая утверждает, что a нильпотентен: для этого потребуется возведение в натуральную степень и квантор по натуральным n:

$$\exists n \in \mathbf{N}\, (a^n = 0)$$

или же бесконечная дизъюнкция:

$$a = 0 \vee (a \cdot a) = 0 \vee ((a \cdot a) \cdot a) = 0 \vee \dots$$

Но таких выражений в языке 1-го порядка нет. (Точное доказательство того, что нильпотентность не выразима в сигнатуре колец, будет обсуждаться позже.)

Лемма 6.3 (Лемма об однозначном анализе термов и формул) *Для данной сигнатуры Ω*

(1) Каждый терм есть либо константа, либо свободная переменная, либо имеет вид $f^n(t_1, \dots, t_n)$ для единственного функционального символа f^n и термов $t_1, \dots, t_n$.

(2) Каждая атомарная формула имеет вид $P^n(t_1, \dots, t_n)$ для единственного предикатного символа P^n и термов $t_1, \dots, t_n$.

(3) Для любой формулы C выполнено ровно одно из условий:

- *C — атомарная,*

- *Существует единственная пара формул* A, B*, такая что* $C = (A \wedge B)$,
- *Существует единственная пара формул* A, B*, такая что* $C = (A \vee B)$,
- *Существует единственная пара формул* A, B*, такая что* $C = (A \rightarrow B)$,
- *Существует единственная формула* A*, такая что* $C = \neg A$,
- $C = \exists x[x/a]A$ *для некоторой формулы* A *и* $a \in FVar$, $x \in BVar$,
- $C = \forall x[x/a]A$ *для некоторой формулы* A *и* $a \in FVar$, $x \in BVar$.

Доказательство опускаем. Отметим, что в последних двух случаях формула A уже не единственна: например,

$$\exists x P(x) = \exists x[x/a]P(a) = \exists x[x/b]P(b).$$

Языки первого порядка: семантика

Определение 21 Модель сигнатуры Ω*, или* Ω-структура*, — это пара вида* $M = (\underline{M}, \mathcal{I})$*, где*

$\underline{M}$ *— непустое множество (*носитель модели*),*

$\mathcal{I}$ *— функция, определенная на множестве* $Pred_\Omega \cup Const_\Omega \cup Fun_\Omega$ *(*интерпретирующая функция*), причем*

- $c \in Const_\Omega \Rightarrow \mathcal{I}(c) \in \underline{M}$,
- $P^n \in Pred_\Omega \Rightarrow \mathcal{I}(P^n) : \underline{M}^n \longrightarrow \{0, 1\}$
  (т.е. $\mathcal{I}(P^n)$ *—* n-местный предикат на $\underline{M}$*),*
- $f^n \in Fun_\Omega \Rightarrow \mathcal{I}(f^n) : \underline{M}^n \longrightarrow \underline{M}$
  (т.е. $\mathcal{I}(f^n)$ *—* n-местная операция на $\underline{M}$*).*

В дальнейшем для заданной модели $M = (\underline{M}, \mathcal{I})$ пишем c_M, P_M, F_M соответственно вместо $\mathcal{I}(c), \mathcal{I}(P), \mathcal{I}(f)$ и $m \in M$ вместо $m \in \underline{M}$.

Определение 22 *Терм, не содержащий переменных (т.е. построенный из констант и функциональных символов), называется* замкнутым. *Для сигнатуры* Ω *множество всех замкнутых термов обозначается* CTm_Ω,

Для замкнутого терма t *индукцией по длине определяется его* значение в модели M*; оно обозначается* $|t|_M$.

- $|c|_M = c_M$ *для* $c \in Const_\Omega$,
- $|f(t_1, \ldots, t_n)|_M = f_M(|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M)$
  для $f^n \in Fun_\Omega$, $t_1, \ldots, t_n \in CTm_\Omega$.

Пример Модель сигнатуры колец — это произвольное непустое множество $\underline{M}$ с выбранными как угодно элементами $0_M, 1_M$, предикатом $=_M$ и операциями $+_M, \cdot_M$. Она не обязана быть кольцом.

Если $M = \mathbf{N}$ с обычным пониманием символов $0, 1, +, \cdot$, то $|(1+1)\cdot 1|_M$ равно 2 (но символа 2 в нашей сигнатуре нет, это — элемент модели).

Если же $M = \mathbf{Z}_2$ (кольцо вычетов mod 2), то $|(1+1)\cdot 1|_M$ равно 0_M.