Введение в математическую логику (осень 2016)

В.Б. Шехтман

Лекция 1

Высказывания — это предложения естественного языка. Естественные языки – предмет изучения других наук: лингвистики и филологии. В математической логике рассматриваются формальные языки. Простейший из них — *язык классической логики высказываний*, который задается так.

Определение 1 *Фиксируем счетное множество символов* пропозициональных переменных $Var = \{P_1, P_2, \ldots\}$ *Множество* пропозициональных формул Fm *строится из этих переменных, логических связок* $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$ *и скобок по индукции:*

(1) Если $P \in Var$, *то* $P \in Fm$.

(2) Если $A, B \in Fm$, *то* $(A \wedge B) \in Fm$.

(3) Если $A, B \in Fm$, *то* $(A \vee B) \in Fm$.

(4) Если $A, B \in Fm$, *то* $(A \to B) \in Fm$.

(5) Если $A \in Fm$, *то* $\neg A \in Fm$.

Таким образом, формулы представляют собой конечные последовательности знаков, т.е. некоторые *слова* в алфавите, состоящем из переменных, связок и скобок. При записи формул обычно используются дополнительные сокращения: внешние скобки опускаются; для экономии внутренних скобок устанавливается приоритет связок : $\wedge$ сильнее $\vee$, $\vee$ сильнее $\to$,

Лемма 1.1 *(Лемма об однозначном анализе формул)*
Для любой формулы C *выполнено ровно одно из условий:*

(I) $C \in Var$,

(II) *Существует единственная пара формул* A, B*, такая что* $C = (A \wedge B)$,

(III) *Существует единственная пара формул* A, B*, такая что* $C = (A \vee B)$,

(IV) *Существует единственная пара формул* A, B*, такая что* $C = (A \to B)$,

(V) *Существует единственная формула* A*, такая что* $C = \neg A$.

Доказательство этой леммы мы пропустим; его можно найти, например, в [1].

Определение 2 *Формула* B *называется* подформулой *формулы* A*, если* B *входит в* A *как подслово (т.е. состоит из всех знаков слова* A*, расположеннных между какими-то двумя позициями).*

Подформулы можно также определить по индукции:

- *Подформулы переменной* P *— это* P.
- *Если* $C = (A \wedge B)$, $(A \vee B)$ *или* $(A \to B)$ *для формул* A, B*, то подформулы* C *— это* C*, а также все подформулы* A *и все подформулы* B.
- *Если* $C = \neg A$*, подформулы* C *— это* C *и все подформулы* A.

Лекция 2

Определение 3 Оценкой (пропозициональных переменных) *называется любое отображение* $f : Var \longrightarrow \mathbb{B}$*, где* $\mathbb{B} = \{и,л\} = \{1, 0\}$.

Лемма 2.1 *Для любой оценки* $f : Var \longrightarrow \mathbb{B}$ *существует единственное отображение* $\overline{f} : Fm \longrightarrow \mathbb{B}$*, такое что для всех* $A, B \in Fm$

(1) $\overline{f}(A) = f(A)$*, если* $A \in Var$,
(2) $\overline{f}(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow \overline{f}(A) = \overline{f}(B) = 1$,
(3) $\overline{f}(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow (\overline{f}(A) = 1$ *или* $\overline{f}(B) = 1)$,
(4) $\overline{f}(A \to B) = 1 \Leftrightarrow (\overline{f}(A) = 0$ *или* $\overline{f}(B) = 1)$,
(5) $\overline{f}(\neg A) = 1 \Leftrightarrow \overline{f}(A) = 0$.

Заметим, что условия (2)–(5) можно записать иначе:

(2) $\overline{f}(A \wedge B) = \min(\overline{f}(A), \overline{f}(B))$,

(3) $\overline{f}(A \vee B) = \max(\overline{f}(A), \overline{f}(B))$,

(4) $\overline{f}(A \to B) = \max(1 - \overline{f}(A), \overline{f}(B))$,

(5) $\overline{f}(\neg A) = 1 - \overline{f}(A)$.

Доказательство Определяем $\overline{f}(C)$ индукцией по длине C. Если C — переменная, то все ясно: $\overline{f}(C) = f(C)$.

Пусть $\overline{f}$ однозначно определена на всех формулах длины $< n$, $n > 1$, и рассмотрим формулу C длины n. По лемме 1.1, возможен ровно один из случаев (II)–(V). В каждом случае $\overline{f}$ однозначно доопределяется для C. Например, в случае (II) $C = (A \wedge B)$, и полагаем $\overline{f}(C) = \min(\overline{f}(A), \overline{f}(B))$; и т. д. Единственность продолжения следует из единственности пары (A, B). ■

$\overline{f}(C)$ называется *значением формулы C при оценке f*; мы будем обозначать его также через $f(C)$.

Заметим еще, что условия (2)–(5) можно переписать так:

(2) $\overline{f}(A \wedge B) = \overline{f}(A) \owedge \overline{f}(B)$,

(3) $\overline{f}(A \vee B) = \overline{f}(A) \ovee \overline{f}(B)$,

(4) $\overline{f}(A \to B) = \overline{f}(A) \ominus\!\!\!\!\to \overline{f}(B)$,

(5) $\overline{f}(\neg A) = \ominus\, \overline{f}(A)$,

где $\ovee$, $\owedge$, $\ominus\!\!\!\!\to$, $\ominus$ соответственно обозначают операции на множестве $\mathbb{B}$: max (“дизъюнкция"), min (“конъюнкция"), $\max(1-x, y)$ (“импликация"), $1 - x$ “отрицание". При таких обозначениях видна некоторая аналогия между условиями (2)–(5) и определением гомоморфизма (или линейного отображения) в алгебре. Лемма 2.1 является аналогом следующего утверждения: любое отображение базиса векторного пространства в другое пространство однозначно продолжается до линейного отображения.

Лемма 2.2 *Значение формулы A при некоторой оценке зависит только от значения этой оценки на переменных из A: если оценки f, g совпадают на всех переменных, входящих в A, то $f(A) = g(A)$.*

Доказательство Это утверждение достаточно очевидно. Формально оно доказывается индукцией по длине A; например, если $A = B \vee C$, имеем:

$$f(A) = f(B) \ovee f(C) = g(B) \ovee g(C) = g(A)$$

(по определению значения формулы и предположению индукции). ■

Определение 4 *Формула называется* тавтологией*, если при любой оценке она принимает значение 1.*

Формула называется выполнимой*, если найдется оценка, при которой она принимает значение 1.*

Лемма 2.3 *Для любой формулы A:*

(1) A — тавтология $\Leftrightarrow \neg A$ не выполнима.

(2) A выполнима $\Leftrightarrow \neg A$ — не тавтология.

Доказательство (1) A — тавтология $\Leftrightarrow$ при любой оценке f, $f(A) = 1$ $\Leftrightarrow$ при любой оценке f, $f(\neg A) \neq 1 \Leftrightarrow \neg A$ не выполнима.

(2) Аналогично. ■

Определение 5 *Мы говорим, что формула A* построена из переменных *$P_1, \ldots, P_n$, если в ней нет других переменных (но не обязательно все $P_1, \ldots, P_n$ в ней встречаются).*

Если A построена из $P_1, \ldots, P_n$, то используем запись $A(P_1, \ldots, P_n)$.

Каждой формуле $A(P_1, \ldots, P_n)$ отвечает *n-местная булева функция* $\varphi_A : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$, которая задает значения A при всевозможных оценках. Таблица значений этой функции называется *таблицей истинности* формулы A.

Дадим точное определение φ_A.

Определение 6 *Для каждого двоичного вектора $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ построим оценку $f_{\overrightarrow{x}} : Var \longrightarrow \mathbb{B}$, такую что $f_{\overrightarrow{x}}(P_i) = x_i$ при $i \leq n$ и (например[1]) $f_{\overrightarrow{x}}(P_i) = 0$ при $i > n$.*

Положим $\varphi_A(\overrightarrow{x}) = f_{\overrightarrow{x}}(A)$.

Определение 7 *Формулы A и B называются* равносильными *(или* эквивалентными*), если при всех оценках их значения совпадают.*

Равносильность формул обозначается знаком $\sim$.

Из леммы 2.2 сразу получаем:

$$A(P_1, \ldots, P_n) \sim B(P_1, \ldots, P_n) \Leftrightarrow \varphi_A^n \equiv \varphi_B^n.$$

Также очевидно, что отношение равносильности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Обозначим через $\top$ формулу $P_1 \to P_1$.

Лемма 2.4

(1) $A \sim B \Leftrightarrow ((A \to B) \wedge (B \to A))$ — тавтология.

(2) A— тавтология $\Leftrightarrow A \sim \top$.

[1] На самом деле неважно, каковы значения при $i > n$.

Доказательство (1) Заметим, что

$$f(A) = f(B) \Leftrightarrow f((A \to B) \wedge (B \to A)) = 1.$$

Действительно,

$$f((A \to B) \wedge (B \to A)) = 1 \Leftrightarrow f(A \to B) = f(B \to A) = 1$$

Обе эти импликации истинны только в двух случаях: когда формулы A, B обе истинны или обе ложны, т.е. когда $f(A) = f(B)$.

(2) совсем очевидно: тавтологичность A как раз и означает, что A равносильна формуле $\top$, которая всегда истинна. ■

Приведем список некоторых равносильностей; проверка их предлагается в качестве упражнения.

Лемма 2.5

(1) $A \wedge B \sim B \wedge A,\ A \vee B \sim B \vee A$ *(коммутативность).*

(2) $(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C),\ (A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$ *(ассоциативность).*

(3) $A \wedge A \sim A,\ A \vee A \sim A$ *(идемпотентность).*

(4) $A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge C) \vee (B \wedge C),\ A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ *(дистрибутивность).*

(5) $A \vee (A \wedge B) \sim A,\ A \wedge (A \vee B) \sim A$ *(поглощение).*

(6) $\neg\neg A \sim A$ *(закон двойного отрицания).*

(7) $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B,\ \neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$ *(законы Де Моргана).*

(8) $A \to B \sim \neg A \vee B$.

Лемма 2.6 *Для любого вектора* $\overrightarrow{x} \in \mathbb{B}^n$ *можно построить* сигнальную формулу $A_{\overrightarrow{x}}$*, для которой*

$$\varphi_{A_{\overrightarrow{x}}}(\overrightarrow{y}) = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}.$$

Таким образом, таблица истинности $A_{\overrightarrow{x}}$ содержит 1 только в строке $\overrightarrow{x}$.

Доказательство Для переменной P обозначим $P^1 = P$, $P^0 = \neg P$.

Заметим, что для любой оценки f и $s \in \mathbb{B}$

$$f(P^s) = 1 \Leftrightarrow f(P) = s.$$

Действительно, при $s = 1$ это совсем очевидно, а при $s = 0$

$$f(P^s) = f(\neg P) = 1 \Leftrightarrow f(P) = 0.$$

Теперь можно взять

$$A_{\overrightarrow{x}} = P_1^{x_1} \wedge \ldots \wedge P_n^{x_n}.$$

В самом деле, для любой оценки f

$$f(A_{\overrightarrow{x}}) = 1 \Leftrightarrow \text{(так как } A_{\overrightarrow{x}} \text{ — конъюнкция)}\ \forall i < n\ f(P_i^{x_i}) = 1$$
$$\Leftrightarrow \text{(по замечанию выше)}\ \forall i < n\ f(P_i) = x_i.$$

Таким образом,

$$\varphi_{A_{\overrightarrow{x}}}(\overrightarrow{y}) = f_{\overrightarrow{y}}(A_{\overrightarrow{x}}) = 1 \Leftrightarrow \forall i < n\ f_{\overrightarrow{y}}(P_i) = x_i$$
$$\Leftrightarrow \text{(по определению } f_{\overrightarrow{y}})\ \forall i < n\ y_i = x_i \Leftrightarrow \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}.$$

■

Теорема 2.7 *[Теорема о функциональной полноте] Любая булева функция отвечает формуле логики высказываний, точнее:*

для любой функции $\alpha : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ существует формула $A(P_1, \ldots, P_n)$, такая что $\varphi_A \equiv \alpha$.[2]

Доказательство Сначала рассмотрим случай, когда α не всюду равна 0. Тогда положим

$$A = \bigvee\{A_{\overrightarrow{x}} \mid \alpha(\overrightarrow{x}) = 1\}.$$

Это означает дизъюнкцию нескольких формул вида $A_{\overrightarrow{x}}$ — по всем векторам $\overrightarrow{x}$, на которых функция α равна 1 (дизъюнкция одной формулы — это сама формула).

Докажем, что $\varphi_A \equiv \alpha$. Действительно,

$$\varphi_A(\overrightarrow{y}) = 1 \Leftrightarrow \exists \overrightarrow{x}(\alpha(\overrightarrow{x}) = 1 \text{ и } \varphi_{A_{\overrightarrow{x}}}(\overrightarrow{y}) = 1)$$

Но, по определению 6, $\varphi_{A_{\overrightarrow{x}}}(\overrightarrow{y}) = f_{\overrightarrow{y}}(A_{\overrightarrow{x}})$, а по лемме 2.6,

$$f_{\overrightarrow{y}}(A_{\overrightarrow{x}}) = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}.$$

Поэтому

$$\varphi_A(\overrightarrow{y}) = 1 \Leftrightarrow \exists \overrightarrow{x}(\alpha(\overrightarrow{x}) = 1 \text{ и } \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}) \Leftrightarrow \alpha(\overrightarrow{y}) = 1.$$

Если же $\alpha \equiv 0$, то можно использовать формулу $P_1 \wedge \neg P_1$, которую мы обозначаем $\perp$. Она ложна при всех оценках, а потому $\varphi_\perp \equiv \alpha$. ■

Список литературы

1. Н.К.Верещагин, А.Х. Шень. Языки и исчисления. М., МЦНМО, 2012.

[2] $\equiv$ обозначает совпадение функций при всех значениях аргумента. Часто пишут '=' вместо $\equiv$.