Лекции по математической логике и теории алгоритмов
А. Л. Семенов, 2023
Лекция 9

1 Полные теории

1.1 Определения и первые примеры. ω-категоричность

Зафиксируем какую-то сигнатуру. Далее все формулы, теории и структуры будут в этой фиксированной сигнатуре.

Напомним, что если Γ — теория (произвольное множество высказываний), а Φ — высказывание, то $\Gamma \vDash \Phi$ (читается Φ следует из Γ) означает, что Φ истинно в любой модели Γ. Обратите внимание, что значок $\vDash \Phi$ мы используем и в ситуации, когда слева от него – структура (высказывание Φ выполнено в этой структуре), и в ситуации, когда слева – множество формул. И в том и в другом случае, речь идет о том, что Φ выполнена.

Определение 1. Теория выполнима, если у нее есть модель.
Выполнимая теория Γ – полна, если $\Gamma \vDash \Phi$ или $\Gamma \vDash \neg\Phi$ для любого высказывания Φ.

Следующая задача дает очевидные примеры полных теорий.

Задача 1. $Th(M)$ полна для любой структуры M.

Подсказка. Во всякой структуре для всякого высказывания или оно, или его отрицание истинно в структуре.

Решение. Возьмем любое высказывание, если оно не лежит в теории структуры, то его отрицание там лежит. Конечно, все, что лежит в теории, следует из нее.

Задача 2. Приведите пример не полной выполнимой теории.

Подсказка. Надо написать высказывание, которое в одних моделях теории истинно, в других ложно.

Решение. Тривиальный пример. Возьмем пустую теорию с сигнатурой, где есть имя нульместного отношения. Тогда есть модели этой теории, где значение взятого имени есть Л и где его значение – И.
Менее тривиальный пример. Рассмотрим теорию линейного порядка (то есть выписанную выше систему аксиом из оределения линейного порядка). Тогда в некоторых моделях этой теории есть наименьший элемент (натуральные числа), в некоторых – верно отрицание существования наименьшего элемента (целые числа).

Следующие задачи также совсем просты.

Задача 3. Почему любую выполнимую теорию можно расширить до полной?

Решение. Теория выполнима, значит, у нее есть модель. $Th(M)$, где M — модель теории, включает нашу теорию и полна по прошлой задаче.

Рассмотрим пример теории, образованной аксиомами частичного порядка. У этой теории есть разные модели, например, двухэлементное множество, элементы которого не сравнимы, или множество всех рациональных чисел с естественным порядком, или множество всех подмножеств действительных чисел с отношением включения. У каждой из этих структур есть своя теория. Все они полны и являются расширениями теории частичного порядка.

Задача 4. Выполнимая теория полна тогда и только тогда, когда две любые ее модели эквивалентны.

Подсказка. Вспомните, что такое эквивалентные структуры.

Решение. Утверждение сразу вытекает из определений.

Задача 5. Пусть существует алгоритм, перечисляющий все элементы некоторой полной теории. Тогда существует алгоритм выяснения по высказыванию, следует ли оно из теории.

Подсказка. Вспомните теорему о перечислимости следствий из лекции о Теореме компактности.

Решение. По теореме о перечислимости следствий, существует алгоритм, перечисляющий следствия. Для всякого высказывания оно или его отрицание появится в этом перечислении. Искомый алгоритм должен просто ждать, что именно появится.

Понятие изоморфизма структур было дано в позапрошлой лекции – первой лекции по теории моделей.

Задача 6. Естественная идея: написать систему аксиом, все модели которой изоморфны. Возможно ли это для какой-то теории (системы аксиом)?

Подсказка. Стоит рассмотреть нормальные и не нормальные модели, конечные и бесконечные теории.

Решение. Случай не нормальных моделей мы уже обсуждали. Он неинтересен: для любого элемента можно добавить «неотличимые от него копии» в любом количестве.
Будем рассматривать только нормальные модели.
Взяв теорию, сигнатура которой состоит только из равенства, нетрудно написать утверждение, что универсум состоит ровно из, скажем, пяти элементов. Все модели теории, состоящей из этого высказывания, изоморфны.
Из теоремы Лёвенгейма – Сколема следует: любая выполнимая теория с бесконечной нормальной моделью имеет нормальные модели любой мощности.

Мы снова возвращаемся к объявленной ранее договоренности, что мы рассматриваем только теории с равенством и нормальные модели.
Даже если моделей много, полнота теории гарантирует, что всякое высказывание будет или истинно в любой из них, или ложно в любой из них.
В силу теоремы Левенгейма – Сколема имеет смысл рассмотреть модели одной мощности. Мы ограничимся счетной мощностью.

Определение 2. *ω-категоричной* называется теория, все счетные модели которой изоморфны

Связь между ω-категоричностью и полнотой устанавливает следующая задача.

Задача 7. Признак Лося – Воота. Выполнимая ω-категоричная теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей, полна.

Подсказка. Рассмотрите определение полноты, счетную модель теории и произвольное высказывание.

Решение. Пусть теория, обладающая указанными свойствами, неполна. Тогда существует такое высказывание Φ, что в какой-то модели теории выполнено Φ, в другой $\neg\Phi$. В силу теоремы Левенгейма – Сколема обе модели можно взять счетными. Они не могут быть изоморфными. Получили противоречие с ω-категоричностью.

1.2 Исследование теорий $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ и $\Gamma_{\mathbb{N}}$

На позапрошлой лекции мы определили две теории (системы аксиом): $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ и $\Gamma_{\mathbb{N}}$.
Мы старались описать, по возможности, свойства (аксиомы для) конкретных счетных упорядоченных множеств — рациональных и натуральных чисел, из которых могли бы следовать все остальные свойства этих структур. Основным элементом сигнатуры при этом было имя $<$ отношения порядка, среди моделей были, соответственно $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}$.

Для каждой из этих теорий можно спросить:

1. Удалось ли нам описать интересующую нас структуру? То есть, верно ли, что все счетные структуры, удовлетворяющие этим свойствам, изоморфны? (Если ответ положительный, то, конечно, мы описали и все свойства структуры, как следствия аксиом.)

2. Если интересующую нас структуру описать не удалось, то, может быть, нам удалось описать с помощью аксиом все ее свойства, то есть, система аксиом полна?

Эти два вопроса для наших структур переформулируются в двух следующих вопросах:

1. **Существуют ли у каждой из теорий $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, $\Gamma_{\mathbb{N}}$ неизоморфные счетные модели?**

2. **Являются ли теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, $\Gamma_{\mathbb{N}}$ полными?**

1.3 Пример ω-категоричной теории

Переформулируем вопрос 2 о $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ с использованием понятия ω-категоричности.

Задача 8. Будет ли ω-категоричной теория $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ плотного порядка без наибольшего и наименьшего элемента?

Подсказка. Обратите внимание на раздел «Одинаковость» структур позапрошлой лекции. Мы там как раз определяли понятие изоморфизма и рассматривали теорию $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.

Решение. Утверждение об изоморфизме всех счетных моделей $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ было доказано на позапрошлой лекции.

Решив эту задачу, нам удалось прояснить ситуацию в случае теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.
Итак, эта теория оказалась ω-категоричной.
В силу признака Лося – Воота $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ полна.

Восстановив доказательство, относящееся к теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, мы можем его использовать для доказательства следующего утверждения, которое нам еще понадобится.

Задача 9. Королларий. Любое счетное линейно упорядоченно множество можно изоморфно (взаимнооднозначно с сохранением порядка) вложить в естественно упорядоченное множество рациональных чисел.

Подсказка. Посмотрите на наше доказательство изоморфизма. Будем теперь действовать только в одну сторону: последовательно перебирая все элементы нашего счетного множеств, надо для каждого найти какое-то рациональное число так, чтобы получилось вложение упорядоченных множеств.

Решение. Начнем с того, что перенумеруем натуральными числами все элементы данного упорядоченного множества S.
Будем строить возрастающую последовательность изоморфных вложений из нашего множества S в рациональные числа.

- Начнем с пустого изоморфизма.

- Пусть построен изоморфизм ψ конечных упорядоченных подмножеств двух наших моделей.

  Добавим к подмножеству из S первый еще не использованный элемент S. Тогда можно добавить еще не использованное в образе рациональное число так, чтобы между полученными подмножествами имелся изоморфизм, продолжающий ψ. То, что это можно сделать, вытекает из требований $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, выполненных для рациональных чисел.

- Проделав эти операции операций счетное число раз, мы получим возрастающую последовательность вложений. Возьмем их объединение.

Полученное отображение будет вложением всего множества S в рациональные числа. Взаимнооднозначность отображения вытекает из того, что она имелась на каждом шаге.
Аналогично, отношение порядка сохранялось на всех шагах, а любая пара элементов, для которых мы хотим проверить сохранение отношения «меньше», имелась в образе или прообразе отображения уже на каком-то шаге.

1.4 Пример полной не ω-категоричной теории

Перейдем к рассмотрению теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$. Напомним, что сигнатура у нас состоит из имен для отношения $<$ и для элемента 0. В теорию включены высказывания (аксиомы):

1. Линейный порядок
2. Наибольшего нет, наименьший — 0
3. У каждого есть следующий; у каждого, кроме нуля, есть предыдущий.

Ясно, что моделью этой теории являются натуральные числа с обычным отношением порядка и нулем в качестве наименьшего элемента. Бывают ли еще какие-то счетные модели у этой теории, можно было бы назвать их *нестандартными*? Или эта теория ω-категорична?

1.4.1 Строение моделей $\Gamma_{\mathbb{N}}$

Фиксируем на время модель M теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$.

Задача 10. Докажите, что для всякого $a \in M$ следующий элемент существует и единствен, а если $a \neq 0$, то предыдущий элемент существует и единствен.

Подсказка. Вспомните определение модели

Решение. Утверждение задачи верно для M, поскольку M – модель теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$

Определение 3. Определим индукцией по $n \in \mathbb{N}$ для всякого $a \in M$ элементы $a + n, a - n \in M$ – *сдвиги a на n* :

- $a + 0 \rightleftharpoons$ a;
- $a + (n + 1) \rightleftharpoons$ следующий элемент за $a + n$
- $a - (n + 1) \rightleftharpoons$ предыдущий элемент перед $a - n$, если он существует,
- при $n < 0$ положим $a + n \rightleftharpoons a - (-n)$.

Задача 11. Докажите, что для всякого $a \in M$ если все целочисленные сдвиги этого элемента существуют, то множество сдвигов как упорядоченное множество изоморфно $\mathbb{Z}$.

Подсказка. Подумайте, какой сдвиг нужно поставить в соответствие целому числу.

Решение. Поставим в соответствие числу $n \in \mathbb{Z}$ элемент $a + n \in M$.
Последовательно проверяем, используя аксиомы из $\Gamma_{\mathbb{N}}$ и индукцию по натуральным числам, что

- $a + n < a + n + 1$
- $a + n - 1 < a + n$

Если теперь $n < m$ то $a + n < a + m$, а это и означает изоморфизм упорядоченных множеств.

Пусть a, b – элементы универсума модели M теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$. Будем говорить, что a и b *близки*, если множество элементов между ними (в смысле порядка на модели) конечно, то есть один из них получается из другого сдвигом. Конечно, в модели $\mathbb{N}$ теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$ два любых элемента близки.

Задача 12. Близость является отношением эквивалентности.

Подсказка. Проверяем определение эквивалентности.

Решение. Проверка:

- рефлексивность: между a и a нет элементов, значит, a и a близки.
- симметричность: множество элементов между a и b — конечно, равносильно тому, что b и a — близки.

- транзитивность: множество элементов между a и b — конечно и между b и c — конечно, значит, между a и c — конечно, то есть они близки.

Классы эквивалентности по отношению близости будем называть *галактиками*. Класс эквивалентности (галактику) элемента a будем обозначать $\underline{a}$. Галактика элемента состоит из всех его сдвигов.

Задача 13. Как, с точки зрения порядка, «устроена» (чему изоморфна) галактика $\underline{0}$? Как устроены все прочие галактики?

Подсказка. Обратите внимание на упорядоченные множества: натуральные и целые числа.

Решение. Установим изоморфизм между галактикой $\underline{0}$ и натуральными числами. Для этого отобразим наименьший элемент упорядоченного множества 0 в число ноль, следующий за ним, существующий в силу аксиомы 3, в число 1 и т. д. В силу аксиом 1 и 2 получим изоморфизм.
Прочих галактик, конечно, может и не быть, ведь $\mathbb{N}$ тоже является моделью теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$. Однако, если описанный выше изоморфизм не исчерпал всю модель, то в ней есть еще какой-то элемент a. Для этого элемента, по аксиоме 3, есть следующий и предыдущий и т.д. получаем изоморфизм галактики $\underline{a}$ с целыми числами.

Задача 14. Определим порядок на галактиках: $\underline{a} < \underline{b} \rightleftharpoons \underline{a} \neq \underline{b}$ и $a < b$.
Действительно ли мы определили порядок? Будет ли порядок на галактиках линейным? Есть ли среди галактик наименьшая?

Подсказка. Проверяйте аксиомы линейного порядка. Используйте только аксиомы из $\Gamma_{\mathbb{N}}$ и определение галактики.

Решение. Заметим, что если $\underline{a}$ и $\underline{b}$ – разные галактики и $a < b$, то все элементы галактики $\underline{a}$ меньше всех элементов галактики $\underline{b}$.
Действительно, все отрицательные сдвиги a меньше a (по индукции), значит, меньше b. Если положительный сдвиг a меньше b, и мы добавим к нему единицу, то получим элемент, который меньше или равен b, последнее невозможно, так как галактики a и b не пересекаются. Следовательно, по индукции, все сдвиги a меньше b.
Проверка всех аксиом линейного порядка очевидна. В следующих формулах переменные – это галактики:

- $\forall u(\neg(u < u))$, действительно, "меньше"для галактик предполагает их различие,
- $\forall u, v, w((u < v \wedge v < w) \to u < w))$, действительно, надо воспользоваться транзитивностью для неравенства между элементами галактик.
- $\forall u, v(u < v \vee v < u \vee u = v)$.

1.4.2 Обогащение сигнатуры сложением, добавление бесконечного элемента. Строение моделей

Определение 4. Определим структуру $\mathbb{N}^+ = \langle \omega, \{0,\ 1,\ 2, ..., <, +\}, \text{Зн}\rangle$.
Смысл всех обозначений очевиден: в сигнатуру входят имена для всех натуральных чисел, обычного отношения порядка и трехместного отношения:
$+(x, y, z) \iff x + y = z$

Как мы уже замечали в аналогичных ситуациях, через трехместное отношение суммы можно определять и произвольные линейные комбинации с рациональными коэффициентами, например:
$x + y + z = t \iff \exists u(+(x, y, u) \wedge +(u, z, t))$

Добавим в сигнатуру еще одно имя объекта – c.

Определение 5. Добавим к теории $Th(\mathbb{N}^+)$ счетное множество высказываний $\{c > i \mid i \in \omega\}$. Полученную теорию назовем *сверхбольшой*.

Задача 15. Будет ли сверхбольшая теория выполнимой?

Подсказка. Напрашивается теорема компактности.

Решение. Конечно, если из числа добавленных оставить конечное количество высказываний, то моделью будет просто $Th(\mathbb{N}^+)$, где к сигнатуре добавлено c, а значением c взято любое натуральное число, большее, чем все числа, участвующие в оставленном конечном множестве высказываний.

Определение 6. Выберем произвольную счетную модель сверхбольшой теории из предыдущей задачи и обозначим ее через $\mathbb{N}^\infty$. Можно назвать ее *нестандартной моделью* теории порядка и сложения натуральных чисел.

Задача 16. $\mathbb{N}^\infty$ — модель теории $\Gamma_\mathbb{N}$. Отношение порядка задает на этой модели разбиение на галактики.

Подсказка. Вспомните последние задачи.

Решение. $\mathbb{N}^\infty$ — модель теории $\Gamma_\mathbb{N}$, потому что эта структура – модель даже большей теории.
Разбиение на галактики у нас получалось для любой модели теории $\Gamma_\mathbb{N}$.

Задача 17. Пусть a и b лежат в разных галактиках $\mathbb{N}^\infty$ и $\underline{a} < \underline{b}$. Можно ли найти d, для которого галактика $\underline{d}$ лежит строго между $\underline{a}$ и $\underline{b}$, то есть $\underline{a} < \underline{d} < \underline{b}$?

Подсказка. Как найти натуральное число, лежащее строго между двумя натуральными числами и далекое от них обоих?
Заметьте, что у нас в сигнатуре есть $+$.
Может ли пригодиться что-то вроде полусуммы чисел?

Решение. Ясно, что $b > 0$.
Если n – имя какого-то натурального числа, то в теории сложения для натуральных a, b из $b - a > 2n + 2$ следует, что $[(a + b)/2] - a > n$ и $b - [(a + b)/2] > n$. Значит

$$\underline{a} < \underline{[(a + b)/2]} < \underline{b}$$

Задача 18. Попробуйте ответить на вопросы, относящиеся к порядку галактик $\mathbb{N}^\infty$:

- есть ли в этом порядке наибольший элемент?
- есть ли в этом порядке наименьший элемент?
- есть ли в этом порядке наименьший элемент, больший нуля?
- будет ли этот порядок плотным?

Подсказка. Используйте ту же схему рассуждения, что в предыдущей задаче и аксиомы сверхбольшой теории.

Решение. Для всякого нестандартного c выполнено $2c > c + n$ при любом n – имени натурального числа. Поэтому среди галактик нет наибольшей.
Наименьшим элементов является, конечно, $\underline{0}$.
В силу предыдущей задачи, порядок будет плотным, в частности, в нем нет наименьшего элемента, большего нуля.

Задача 19. Докажите, что все счетные структуры $\mathbb{N}^\infty$ как упорядоченные множества (забудем про сложение) изоморфны структуре $\mathbb{N} + \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$, то есть линейно упорядоченному множеству, где сначала идут натуральные числа, а потом счетное количество копий целых чисел, порядок между этими копиями устроен как рациональные числа.

Подсказка. По существу мы это уже доказали в последней задаче.

Решение. Возьмем пару таких счетных структур.
Установим взаимно однозначное соответствие между значениями имен объектов в этих двух структурах. Это даст нам изоморфизм между компонентами $\mathbb{N}$ в двух структурах.
В каждой из ненулевых галактик каждой из структур выберем по элементу. Установим взаимно однозначное соответствия между этими множествами элементов, как между двумя счетными плотными линейно упорядоченными множествами без наибольшего и наименьшего элемента.

Это соответствие очевидным образом продолжается до изоморфизма упорядоченных множеств: если элементу a мы поставили в соответствие a' , то сдвигу $a+n$, где n – целое, мы ставим в соответствие $a'+n$.

Если вернуть в структуру отношение сложения, то

Задача 20. (Дополнительная) Попытайтесь найти две неизоморфные счетные структуры $\mathbb{N}^\infty$.

Подсказка. Конечно, с точки зрения порядка все структуры $\mathbb{N}^\infty$ будут изоморфны, а вот сложение в них может быть устроено по-разному.

1.4.3 Забываем про все добавленное. Свойства построенной модели $\mathbb{N}^\infty_<$.

Определение 7. Обозначим через $\mathbb{N}^\infty_<$ структуру, получаемую из $\mathbb{N}^\infty$ выбрасыванием из сигнатуры имени $+$ и всех имен объектов, кроме 0, то есть имен $1, 2, ...c$.

В остающейся части наших рассуждений мы будем иметь дело со структурой $\mathbb{N}^\infty_<$ и установим ряд ее замечательных свойств, выделяя их подзаголовками.

Модель порядка $\mathbb{N}^\infty_<$

Задача 21. Докажите, что $\mathbb{N}^\infty_<$ — модель теории $\Gamma_\mathbb{N}$.

Подсказка. Очевидно.

Решение. Теория $\Gamma_\mathbb{N}$ входила в теорию, для которой $\mathbb{N}^\infty_<$ является моделью. Поэтому все высказывания из $\Gamma_\mathbb{N}$ выполнены в $\mathbb{N}^\infty_<$.

Нестандартность

Задача 22. Может ли структура $\mathbb{N}^\infty_<$ оказаться изоморфной $\mathbb{N}$?

Подсказка. Бесконечно большие элементы некуда девать.

Решение. Если бы изоморфизм существовал, то наименьшие элементы должны были бы соответствовать друг другу, следующие – друг другу и т.д. Таким образом натуральные числа должны были бы соответствовать элементам нулевой галактики в нестандартной модели, но бесконечно большим элементам модели ничего не соответствует.

Структуру $\mathbb{N}^\infty_<$ можно назвать *нестандартной моделью* теории $\Gamma_\mathbb{N}$.

Автоморфизмы

Определение 8. Автоморфизм структуры — изоморфизм на себя.

Задача 23. Автоморфизм сохраняет значение формул, в том числе — высказываний. (Уточните, что это значит и докажите.)

Подсказка. Это утверждение уже встречалось нам раньше. Найдите его.

Задача 24. Есть ли автоморфизмы у $\mathbb{N}$? А у $\mathbb{N}^{\infty}_{<}$?

Подсказка. Докажите, что вычитание единицы в одной из галактик, отличной от $\mathbb{N}$ — автоморфизм, обозначим его (-1).

Решение. Действительно, указанное отображение, если его доопределить, как тождественное, на других галактиках, сохраняет ноль и порядок на всем универсуме.

Таким образом, у нашей нестандартной модели есть нетривиальные автоморфизмы; они нам еще понадобятся.

Универсальность
Следуюее замечательное свойство $\mathbb{N}^{\infty}_{<}$ — это некоторая *универсальность* этой структуры. Чтобы пояснить, что мы имеем в виду, введем еще одно определение.

Определение 9. Подструктура модели теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$ называется правильной, если она содержит только галактики целиком.

Задача 25. Всякая счетная модель $\Gamma_{\mathbb{N}}$ изоморфна правильной подструктуре в $\mathbb{N}^{\infty}_{<}$.

Подсказка. Всякая модель разбивается на галактики. Вкладывайте галактики целиком, используйте королларий нашего рассуждения про ω-категоричность теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.

Решение. Заметим, что всякая модель M теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$ должна содержать наименьший элемент – значение имени 0. Между галактиками $\underline{0}$ в двух структурах однозначным образом устанавливается взаимнооднозначное соответствие.
Остальные галактики M образуют счетное линейно упорядоченное множество. Изоморфно вкладываем его в плотное линейно упорядоченное множество галактик модели $\mathbb{N}^{\infty}_{<}$. (Не все галактики должны быть образами.) Между элементами пар галактик устанавливаем взаимнооднозначное соответствие, как мы это уже делали.

Таким образом, структура $\mathbb{N}^{\infty}_{<}$ — универсальна в том смысле, что в нее вкладывается любая счетная модель теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$. И, более того,

Задача 26. Структура $\mathbb{N}^{\infty}_{<}$ является элементарным расширением любой своей правильной подструктуры.

Подсказка. Идея доказательства в том, чтобы использовать критерий Тарского – Воота. При этом нужно взять наименьший объект, который должен найтись для выполнения этого критерия, и если он не лежит в подструктуре, то найти еще меньший.

Решение. Воспользуемся критерием Тарского – Воота для произвольно взятой правильной подструктуры. Рассмотрим произвольную формулу $\Phi(x, y)$ и произвольный набор c элементов подструктуры.
В упорядоченном множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ выполнена формула, означающая, что для любого c среди тех e , для которых выполнено $\Phi(x, y)$, есть наименьшее:

$$\forall x \exists y(\Phi(x, y) \wedge \forall z(\Phi(z, y) \wedge z < y \rightarrow \neg\Phi(z, y)))$$

Значит, выписанная только что формула (для любого конкретного $\Phi(x, y)$) принадлежит $Th(\mathbb{N}^{\infty}_{<})$ то есть выполнена в нашей структуре $\mathbb{N}^{\infty}_{<}$, а не только в натуральных числах.
Возьмем наименьший элемент e из $\mathbb{N}^{\infty}_{<}$, для которого выполнено $\mathbb{N}^{\infty}_{<} \models \Phi(c, e)$. Если e не лежит в рассматриваемой подструктуре $\mathbb{N}^{\infty}_{<}$, то, в силу правильности, и галактика, содержащая e, целиком не лежит в подструктуре, тогда применим автоморфизм (-1) для той галактики, где лежит e. Автоморфизм оставляет c на месте, но дает меньшее e, что невозможно. Значит e лежит в подструктуре.
Утверждение доказано.

Завершение доказательства

Задача 27. Всякая модель $\Gamma_{\mathbb{N}}$ элементарно эквивалентна $\mathbb{N}^{\infty}_{<}$.

Подсказка. Попробуйте скомбинировать последние задачи.

Решение. Конечно, всякая модель эквивалентна счетной, поэтому можно ограничиться счетными моделями.
Как мы доказали недавно, всякая счетная модель $\Gamma_{\mathbb{N}}$ изоморфна правильной подструктуре в структуре $\mathbb{N}^{\infty}_{<}$. В предыдущей задаче мы установили, что $\mathbb{N}^{\infty}_{<}$ является элементарным расширением этой подструктуры.
Утверждение доказано.

Задача 28. Итак, теория $\Gamma_{\mathbb{N}}$

- полна
- у нее существуют неизоморфные счетные модели, то есть она не ω-категорична.

Восстановите всю структуру доказательства. В частности, зачем нам понадобилось добавлять плюс в сигнатуру, зачем нужно добавление бесконечно большого объекта? Почему в некоторых местах мы использовали теорию $\Gamma_{\mathbb{N}}$, а в некоторых — $Th(\mathbb{N}^{\infty})$?

Подсказка. Обратите внимание на свойства построенной структуры.

Решение. Обогащение сигнатуры и добавление бесконечно большого элемента нам было нужно, чтобы сузить класс моделей, как упорядоченных множеств.
Той же цели сужения класса порядков служило рассмотрение всех высказываний, выполненных для натуральных чисел с порядком и сложением.

Таким образом, мы доказали, что попытка описать системой аксиом математическую структуру (с точностью до изоморфизма) может заканчиваться неудачей даже для довольно простой ситуации, когда мы описываем порядок натуральных чисел.
Напомним, что в случае порядка рациональных чисел — это не так: теория полна и категорична.

Задача 29. Дополнительная.
Построить процедуру элиминации кванторов для структур $\langle \mathbb{Q}, +, 1\rangle$; $\langle \mathbb{N}, <, +n\rangle$. Атомные формулы могут использовать операции (как это было с действительными числами). Можно разрешать все уравнения и неравенства относительно одной неизвестной. В качестве значений неизвестной можно рассмотреть выражения (линейные многочлены) от других.