Лекции по математической логике и теории алгоритмов
А. Л. Семенов, 2023
Лекция 9

1 Полные теории

1.1 Определения и первые примеры. ω-категоричность

Зафиксируем какую-то сигнатуру. Далее все формулы, теории и структуры будут в этой фиксированной сигнатуре.

Напомним, что если Γ — теория (произвольное множество высказываний), а Φ — высказывание, то $\Gamma \vDash \Phi$ (читается Φ следует из Γ) означает, что Φ истинно в любой модели Γ. Обратите внимание, что значок $\vDash \Phi$ мы используем и в ситуации, когда слева от него – структура (высказывание Φ выполнено в этой структуре), и в ситуации, когда слева – множество формул. И в том и в другом случае, речь идет о том, что Φ выполнена.

Определение 1. Теория выполнима, если у нее есть модель.
Выполнимая теория Γ – полна, если $\Gamma \vDash \Phi$ или $\Gamma \vDash \neg\Phi$ для любого высказывания Φ.

Следующая задача дает очевидные примеры полных теорий.

Задача 1. $Th(M)$ полна для любой структуры M.

Подсказка. Во всякой структуре для всякого высказывания или оно, или его отрицание истинно в структуре.

Задача 2. Приведите пример не полной выполнимой теории.

Подсказка. Надо написать высказывание, которое в одних моделях теории истинно, в других ложно.

Следующие задачи также совсем просты.

Задача 3. Почему любую выполнимую теорию можно расширить до полной?

Рассмотрим пример теории, образованной аксиомами частичного порядка. У этой теории есть разные модели, например, двухэлементное множество, элементы которого не сравнимы, или множество всех рациональных чисел с естественным порядком, или множество всех подмножеств действительных чисел с отношением включения. У каждой из этих структур есть своя теория. Все они полны и являются расширениями теории частичного порядка.

Задача 4. Выполнимая теория полна тогда и только тогда, когда две любые ее модели эквивалентны.

Подсказка. Вспомните, что такое эквивалентные структуры.

Задача 5. Пусть существует алгоритм, перечисляющий все элементы некоторой полной теории. Тогда существует алгоритм выяснения по высказыванию, следует ли оно из теории.

Подсказка. Вспомните теорему о перечислимости следствий из лекции о Теореме компактности.

Понятие изоморфизма структур было дано в позапрошлой лекции – первой лекции по теории моделей.

Задача 6. Естественная идея: написать систему аксиом, все модели которой изоморфны. Возможно ли это для какой-то теории (системы аксиом)?

Подсказка. Стоит рассмотреть нормальные и не нормальные модели, конечные и бесконечные теории.

Мы снова возвращаемся к объявленной ранее договоренности, что мы рассматриваем только теории с равенством и нормальные модели.
Даже если моделей много, полнота теории гарантирует, что всякое высказывание будет или истинно в любой из них, или ложно в любой из них.
В силу теоремы Левенгейма – Сколема имеет смысл рассмотреть модели одной мощности. Мы ограничимся счетной мощностью.

Определение 2. *ω-категоричной* называется теория, все счетные модели которой изоморфны

Связь между ω-категоричностью и полнотой устанавливает следующая задача.

Задача 7. Признак Лося – Воота. Выполнимая ω-категоричная теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей, полна.

Подсказка. Рассмотрите определение полноты, счетную модель теории и произвольное высказывание.

1.2 Исследование теорий $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ и $\Gamma_{\mathbb{N}}$

На позапрошлой лекции мы определили две теории (системы аксиом): $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ и $\Gamma_{\mathbb{N}}$.
Мы старались описать, по возможности, свойства (аксиомы для) конкретных счетных упорядоченных множеств — рациональных и натуральных чисел, из которых могли бы следовать все остальные свойства этих структур. Основным элементом сигнатуры при этом было имя $<$ отношения порядка, среди моделей были, соответственно $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}$.

Для каждой из этих теорий можно спросить:

1. Удалось ли нам описать интересующую нас структуру? То есть, верно ли, что все счетные структуры, удовлетворяющие этим свойствам, изоморфны? (Если ответ положительный, то, конечно, мы описали и все свойства структуры, как следствия аксиом.)
2. Если интересующую нас структуру описать не удалось, то, может быть, нам удалось описать с помощью аксиом все ее свойства, то есть, система аксиом полна?

Эти два вопроса для наших структур переформулируются в двух следующих вопросах:

1. **Существуют ли у каждой из теорий $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, $\Gamma_{\mathbb{N}}$ неизоморфные счетные модели?**
2. **Являются ли теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, $\Gamma_{\mathbb{N}}$ полными?**

1.3 Пример ω-категоричной теории

Переформулируем вопрос 2 о $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ с использованием понятия ω-категоричности.

Задача 8. Будет ли ω-категоричной теория $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ плотного порядка без наибольшего и наименьшего элемента?

Подсказка. Обратите внимание на раздел «Одинаковость» структур позапрошлой лекции. Мы там как раз определяли понятие изоморфизма и рассматривали теорию $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.

Решив эту задачу, нам удалось прояснить ситуацию в случае теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.
Итак, эта теория оказалась ω-категоричной.
В силу признака Лося – Воота $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ полна.

Восстановив доказательство, относящееся к теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, мы можем его использовать для доказательства следующего утверждения, которое нам еще понадобится.

Задача 9. Королларий. Любое счетное линейно упорядоченно множество можно изоморфно (взаимнооднозначно с сохранением порядка) вложить в естественно упорядоченное множество рациональных чисел.

Подсказка. Посмотрите на наше доказательство изоморфизма. Будем теперь действовать только в одну сторону: последовательно перебирая все элементы нашего счетного множеств, надо для каждого найти какое-то рациональное число так, чтобы получилось вложение упорядоченных множеств.

1.4 Пример полной не ω-категоричной теории

Перейдем к рассмотрению теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$. Напомним, что сигнатура у нас состоит из имен для отношения $<$ и для элемента 0. В теорию включены высказывания (аксиомы):

1. Линейный порядок
2. Наибольшего нет, наименьший — 0
3. У каждого есть следующий; у каждого, кроме нуля, есть предыдущий.

Ясно, что моделью этой теории являются натуральные числа с обычным отношением порядка и нулем в качестве наименьшего элемента. Бывают ли еще какие-то счетные модели у этой теории, можно было бы назвать их *нестандартными*? Или эта теория ω-категорична?

1.4.1 Строение моделей $\Gamma_{\mathbb{N}}$

Фиксируем на время модель M теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$.

Задача 10. Докажите, что для всякого $a \in M$ следующий элемент существует и единствен, а если $a \neq 0$, то предыдущий элемент существует и единствен.

Подсказка. Вспомните определение модели

Определение 3. Определим индукцией по $n \in \mathbb{N}$ для всякого $a \in M$ элементы $a + n, a - n \in M$ – *сдвиги* a *на* n :

- $a + 0 \rightleftharpoons$ a;
- $a + (n + 1) \rightleftharpoons$ следующий элемент за $a + n$
- $a - (n + 1) \rightleftharpoons$ предыдущий элемент перед $a - n$, если он существует,
- при $n < 0$ положим $a + n \rightleftharpoons a - (-n)$.

Задача 11. Докажите, что для всякого $a \in M$ если все целочисленные сдвиги этого элемента существуют, то множество сдвигов как упорядоченное множество изоморфно $\mathbb{Z}$.

Подсказка. Подумайте, какой сдвиг нужно поставить в соответствие целому числу.

Пусть a, b – элементы универсума модели M теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$. Будем говорить, что a и b *близки*, если множество элементов между ними (в смысле порядка на модели) конечно, то есть один из них получается из другого сдвигом. Конечно, в модели $\mathbb{N}$ теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$ два любых элемента близки.

Задача 12. Близость является отношением эквивалентности.

Подсказка. Проверяем определение эквивалентности.

Классы эквивалентности по отношению близости будем называть *галактиками*. Класс эквивалентности (галактику) элемента a будем обозначать $\underline{a}$. Галактика элемента состоит из всех его сдвигов.

Задача 13. Как, с точки зрения порядка, «устроена» (чему изоморфна) галактика $\underline{0}$? Как устроены все прочие галактики?

Подсказка. Обратите внимание на упорядоченные множества: натуральные и целые числа.

Задача 14. Определим порядок на галактиках: $\underline{a} < \underline{b} \rightleftharpoons \underline{a} \neq \underline{b}$ и $a < b$.
Действительно ли мы определили порядок? Будет ли порядок на галактиках линейным? Есть ли среди галактик наименьшая?

Подсказка. Проверяйте аксиомы линейного порядка. Используйте только аксиомы из $\Gamma_{\mathbb{N}}$ и определение галактики.

1.4.2 Обогащение сигнатуры сложением, добавление бесконечного элемента. Строение моделей

Определение 4. Определим структуру $\mathbb{N}^{+} = \langle \omega, \{0,\ 1,\ 2, ..., <, +\}, \text{Зн} \rangle$.
Смысл всех обозначений очевиден: в сигнатуру входят имена для всех натуральных чисел, обычного отношения порядка и трехместного отношения:
$+(x, y, z) \iff x + y = z$

Как мы уже замечали в аналогичных ситуациях, через трехместное отношение суммы можно определять и произвольные линейные комбинации с рациональными коэффициентами, например:
$x + y + z = t \iff \exists u(+(x, y, u) \wedge +(u, z, t))$

Добавим в сигнатуру еще одно имя объекта – c.

Определение 5. Добавим к теории $Th(\mathbb{N}^{+})$ счетное множество высказываний $\{c > i \mid i \in \omega\}$. Полученную теорию назовем *сверхбольшой*.

Задача 15. Будет ли сверхбольшая теория выполнимой?

Подсказка. Напрашивается теорема компактности.

Определение 6. Выберем произвольную счетную модель сверхбольшой теории из предыдущей задачи и обозначим ее через $\mathbb{N}^\infty$. Можно назвать ее *нестандартной моделью* теории порядка и сложения натуральных чисел.

Задача 16. $\mathbb{N}^\infty$ — модель теории $\Gamma_\mathbb{N}$. Отношение порядка задает на этой модели разбиение на галактики.

Подсказка. Вспомните последние задачи.

Задача 17. Пусть a и b лежат в разных галактиках $\mathbb{N}^\infty$ и $\underline{a} < \underline{b}$. Можно ли найти d, для которого галактика $\underline{d}$ лежит строго между $\underline{a}$ и $\underline{b}$, то есть $\underline{a} < \underline{d} < \underline{b}$?

Подсказка. Как найти натуральное число, лежащее строго между двумя натуральными числами и далекое от них обоих?
Заметьте, что у нас в сигнатуре есть $+$.
Может ли пригодиться что-то вроде полусуммы чисел?

Задача 18. Попробуйте ответить на вопросы, относящиеся к порядку галактик $\mathbb{N}^\infty$:

- есть ли в этом порядке наибольший элемент?
- есть ли в этом порядке наименьший элемент?
- есть ли в этом порядке наименьший элемент, больший нуля?
- будет ли этот порядок плотным?

Подсказка. Используйте ту же схему рассуждения, что в предыдущей задаче и аксиомы сверхбольшой теории.

Задача 19. Докажите, что все счетные структуры $\mathbb{N}^\infty$ как упорядоченные множества (забудем про сложение) изоморфны структуре $\mathbb{N} + \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$, то есть линейно упорядоченному множеству, где сначала идут натуральные числа, а потом счетное количество копий целых чисел, порядок между этими копиями устроен как рациональные числа.

Подсказка. По существу мы это уже доказали в последней задаче.

Если вернуть в структуру отношение сложения, то

Задача 20. (Дополнительная) Попытайтесь найти две неизоморфные счетные структуры $\mathbb{N}^\infty$.

Подсказка. Конечно, с точки зрения порядка все структуры $\mathbb{N}^\infty$ будут изоморфны, а вот сложение в них может быть устроено по-разному.

1.4.3 Забываем про все добавленное. Свойства построенной модели $\mathbb{N}^\infty_<$.

Определение 7. Обозначим через $\mathbb{N}^\infty_<$ структуру, получаемую из $\mathbb{N}^\infty$ выбрасыванием из сигнатуры имени $+$ и всех имен объектов, кроме 0, то есть имен $1, 2, ...c$.

В остающейся части наших рассуждений мы будем иметь дело со структурой $\mathbb{N}^\infty_<$ и установим ряд ее замечательных свойств, выделяя их подзаголовками.

Модель порядка $\mathbb{N}^\infty_<$

Задача 21. Докажите, что $\mathbb{N}^\infty_<$ — модель теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$.

Подсказка. Очевидно.

Нестандартность

Задача 22. Может ли структура $\mathbb{N}^\infty_<$ оказаться изоморфной $\mathbb{N}$?

Подсказка. Бесконечно большие элементы некуда девать.

Структуру $\mathbb{N}^\infty_<$ можно назвать *нестандартной моделью* теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$.

Автоморфизмы

Определение 8. Автоморфизм структуры — изоморфизм на себя.

Задача 23. Автоморфизм сохраняет значение формул, в том числе — высказываний. (Уточните, что это значит и докажите.)

Подсказка. Это утверждение уже встречалось нам раньше. Найдите его.

Задача 24. Есть ли автоморфизмы у $\mathbb{N}$? А у $\mathbb{N}^\infty_<$?

Подсказка. Докажите, что вычитание единицы в одной из галактик, отличной от $\mathbb{N}$ — автоморфизм, обозначим его (-1).

Таким образом, у нашей нестандартной модели есть нетривиальные автоморфизмы; они нам еще понадобятся.

Универсальность

Следуюее замечательное свойство $\mathbb{N}^\infty_<$ — это некоторая *универсальность* этой структуры. Чтобы пояснить, что мы имеем в виду, введем еще одно определение.

Определение 9. Подструктура модели теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$ называется правильной, если она содержит только галактики целиком.

Задача 25. Всякая счетная модель $\Gamma_{\mathbb{N}}$ изоморфна правильной подструктуре в $\mathbb{N}^\infty_<$.

Подсказка. Всякая модель разбивается на галактики. Вкладывайте галактики целиком, используйте королларий нашего рассуждения про ω-категоричность теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.

Таким образом, структура $\mathbb{N}^{\infty}_{<}$ — универсальна в том смысле, что в нее вкладывается любая счетная модель теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$. И, более того,

Задача 26. Структура $\mathbb{N}^{\infty}_{<}$ является элементарным расширением любой своей правильной подструктуры.

Подсказка. Идея доказательства в том, чтобы использовать критерий Тарского – Воота. При этом нужно взять наименьший объект, который должен найтись для выполнения этого критерия, и если он не лежит в подструктуре, то найти еще меньший.

Завершение доказательства

Задача 27. Всякая модель $\Gamma_{\mathbb{N}}$ элементарно эквивалентна $\mathbb{N}^{\infty}_{<}$.

Подсказка. Попробуйте скомбинировать последние задачи.

Задача 28. Итак, теория $\Gamma_{\mathbb{N}}$

- полна
- у нее существуют неизоморфные счетные модели, то есть она не ω-категорична.

Восстановите всю структуру доказательства. В частности, зачем нам понадобилось добавлять плюс в сигнатуру, зачем нужно добавление бесконечно большого объекта? Почему в некоторых местах мы использовали теорию $\Gamma_{\mathbb{N}}$, а в некоторых — $Th(\mathbb{N}^{\infty})$?

Подсказка. Обратите внимание на свойства построенной структуры.

Таким образом, мы доказали, что попытка описать системой аксиом математическую структуру (с точностью до изоморфизма) может заканчиваться неудачей даже для довольно простой ситуации, когда мы описываем порядок натуральных чисел.
Напомним, что в случае порядка рациональных чисел — это не так: теория полна и категорична.

Задача 29. Дополнительная.
Построить процедуру элиминации кванторов для структур $\langle \mathbb{Q}, +, 1 \rangle$; $\langle \mathbb{N}, <, +n \rangle$. Атомные формулы могут использовать операции (как это было с действительными числами). Можно разрешать все уравнения и неравенства относительно одной неизвестной. В качестве значений неизвестной можно рассмотреть выражения (линейные многочлены) от других.