Лекции по математической логике и теории алгоритмов
А. Л. Семенов, 2023
Лекция 8

1 Структуры и теории. Элементарные расширения

Зафиксируем некоторую сигнатуру и будем рассматривать структуры и теории с этой сигнатурой. Основным отношением, с которым мы продолжаем работать, является отношение истинности формулы Φ в структуре M; обозначение $M \vDash \Phi$.

Определение 1. Пусть M — структура.
Тогда $Th(M)$ — *теория структуры* M — множество высказываний, выполненных в структуре M.
Теория Th(m) множества структур m состоит из высказываний, выполненных в каждой структуре множества.
Пусть ϕ — теория (произвольное множество высказываний).
Тогда $Mod(\phi)$ — *класс всех моделей теории* ϕ.

Таким образом, у нас есть два отображения: $Th(m)$ — из множеств структур в теории и $Mod(\phi)$ — из теорий в множества структур.

Замечание. В соответствии с естественной математической традицией элементы структур, объекты естественно обозначать малыми (строчными) латинскими буквами, а сами структуры – большими (прописными). Также большими, греческими, буквами мы обозначаем формулы. Для множеств структур и множеств формул было бы естественно использовать «еще бОльшие» буквы. Их, однако, алфавиты не предоставляют. Мы принимаем, поэтому парадоксальное, противоположное решение, начинаем обозначать множества структур малыми латинскими, а множества высказываний — теории, малыми греческими буквами. Надеемся, что результатом этого замечания станет некоторая первоначальная внимательность читателя, которая убережет его от недоразумений и чрезмерных напряжений.

Задача 1. Докажите, что

- Отображения Th, Mod — (нестрого) монотонно убывающие (другими словами — антимонотонные).
- $m \subseteq Mod(\phi) \iff \phi \subseteq Th(m)$;
- $\phi \subseteq Th(Mod(\phi))$;
- $m \subseteq Mod(Th(m))$.

Подсказка. Главное понятие, которое здесь нужно – это истинность высказывания в структуре. Обратитесь к своим содержательным представлениям, если нужно — к формальным определениям.

Решение. Попробуем объяснить словами требуемые утверждения:

- При добавлении новой структуры к множеству структур не может появиться новых истинных в этих структурах высказываний — это и есть антимонотонность.

  Аналогично, добавление нового высказывания не может привести к расширению множества моделей — это и есть антимонотонность.

- Все структуры из m являются моделями всех высказываний из $\phi \iff$ все высказывания из ϕ верны во всех структурах из m – очевидно.

- $Mod(\phi)$ — все структуры, в которых теория ϕ выполняется. $Th(Mod(\phi))$ — все высказывания, выполненные в каждой такой структуре. Ясно, что среди них есть все высказывания из ϕ.

- $Th(m)$ — все высказывания, выполненные во всех структурах из m. $Mod(Th(m))$ — все структуры, на которых эти высказывания выполнены. В частности, они выполняются во всех структурах из m.

Определение 2. Пусть заданы два произвольных частично упорядоченных множества, элементы первого обозначим ϕ, второго — m, а оба отношения нестрого порядка обозначим одним и тем же символом $\subseteq$.
О паре отображений $\langle Th, Mod\rangle$, для которых выполнено утверждение последней задачи, говорят, что они образуют *соответствие Галуа (антимонотонное)* между этими множествами.

Определение 3. (Напоминание.) Структуры *(элементарно) эквивалентны*, если их теории совпадают.

Задача 2. Докажите, что структура M' эквивалентна структуре M тогда и только тогда, когда $M' \vDash Th(M)$;

Определение 4. *Подструктура структуры* :

- сигнатура у подструктуры та же, что и у структуры;
- универсум подструктуры — подмножество (под-универсум) универсума структуры;
- значения принадлежащих сигнатуре имен объектов лежат в под-универсуме и одинаковы для структуры и подструктуры;

- значения имен отношений совпадают на под-универсуме; то есть если брать объекты только из под-универсума, то на наборах этих объектов совпадают значения двух отношений, являющих значениями одного и того же имени из сигнатуры.

Определение 5. Для всякой структуры M обозначим через $M^@$ структуру, сигнатура которой получается из исходной сигнатуры добавлением имен для всех элементов носителя M, которые не имели имен в исходной сигнатуре. Структуру $M^@$ можно называть также *именованием* M.

Таким образом, в случае $M = \langle Q, \{<\}\rangle$, теория $Th(M^@)$, кроме $Th(M)$, будет содержать всевозможные высказывания вида $0 < 1; 0.5 < 0.75; \ldots; \exists x(0 < x \wedge x < 0.00001)$ и так далее.

Определение 6. (Напоминание) и этого определения раньше не было Пусть $M_1 = \langle D_1, \Sigma, \text{Зн}_1\rangle$ — подструктура структуры $M = \langle D, \Sigma, \text{Зн}\rangle$. M — называется *элементарным расширением* M_1 если:

- M_1 – подструктура M;
- значения в обеих структурах любой формулы $\Phi(x)$ совпадают на элементах подструктуры: $M \vDash \Phi(a) \iff M_1 \vDash \Phi(a)$ для любого набора a имен элементов D_1.

  В этом случае также M_1 называется *элементарной подструктурой* M.

Задача 3. Докажите, что:

- структура M' является элементарным расширением структуры M тогда и только тогда, когда $M' \vDash Th(M^@)$.

Очевидное замечание:

Задача 4. Если структура M является элементарным расширением структуры M_1, то эти две структуры эквивалентны.

Решение. Высказывание – это частный случай формулы, поэтому значения одного высказывания в двух структурах совпадают.

Естественно возникает следующий вопрос:

Существуют ли такие структуры M и M_1, что:
(1) M_1 — подструктура M, и M_1 эквивалентна M, но
(2) M_1 не является элементарной подструктурой M?

Еще раньше возникает вопрос, может ли быть расширение структуры неэлементарным расширением?

Мы ответим на этот вопрос позднее.

Следующая важная теорема в некотором смысле сводит вопрос об элементарном расширении к частному случаю квантора существования. В ее формулировке и доказательстве мы будем, как это часто делается в математике, не различать объекты и их имена, говоря о подстановке объекта в формулу, будем подразумевать подстановку соответствующего имени.

Задача 5. Критерий Тарского – Воота
Пусть $M_1 = \langle D_1, \Sigma, \text{Зн}_1 \rangle$ — подструктура структуры $M = \langle D, \Sigma, \text{Зн} \rangle$. Следующие два условия эквивалентны:
(1) M — элементарное расширение структуры M_1;
(2) для любой формулы $\Phi(x, y)$, где x — набор переменных и y — переменная, и для любого набора a элементов D_1:
$M \vDash \Phi(a, b)$ для некоторого $b \in D \Rightarrow M \vDash \Phi(a, b)$ для некоторого $b \in D_1$.

Подсказка. (1)$\Rightarrow$ (2)
Рассмотрите формулу с квантором существования по y, воспользуйтесь определением элементарного расширения.
(2)$\Rightarrow$ (1)
Попробуйте доказывать индукцией по построению формулы. Полезно при этом считать, что в (2) утверждается не только импликация, но и сразу вытекающая из нее эквивалентность.

Решение. (1)$\Rightarrow$ (2)
Пусть $M \vDash \Phi(a, b)$ для $a \in D_1^*$ и некоторого $b \in D$.
Тогда $M \vDash \exists y \Phi(a, y)$
Поскольку M — элементарное расширение M_1, имеем
$M_1 \vDash \exists y \Phi(a, y)$
Значит, для некоторого $b \in D_1$
$M_1 \vDash \Phi(a, b)$
Остается опять воспользоваться элементарной эквивалентностью Mи M_1, чтобы получить нужное заключение:
$M \vDash \Phi(a, b)$ для $b \in D_1$.

(2)$\Rightarrow$ (1)
Заменим в утверждении (2) импликацию на эквивалентность.
Будем доказывать утверждение (1) индукцией по построению формулы $\Phi(x)$ из определения элементарной подструктуры (расширения).
Для атомных формул это очевидно, поскольку M_1 — подструктура M.

Для индуктивного шага с использованием дизъюнкции и отрицания это также тривиально.
Остается случай квантора существования, то есть формулы вида $\exists y \Phi(x, y)$ где x – набор переменных, y – переменная.
В этом случае как раз утверждение (2) содержательно и дает нужный результат. Именно, пусть выполнено индуктивное предположение
$M \models \Phi(a, b) \iff M_1 \models \Phi(a, b)$ для любого набора $a, b \in D_1^*$
В силу (2) существование $b \in D$, для которого $M \models \Phi(a, b)$, эквивалентно существованию $b \in D_1$, для которого $M \models \Phi(a, b)$.
Отсюда получаем:
$M \models \exists y \Phi(a, y) \iff M_1 \models \exists y \Phi(a, y)$ для любого набора $a \in D_1^*$.

Кажется, раньше конец доказательства обозначался квадратиком. Уместно это сделать и здесь. Дальше мы переходим к вопросу, связь которого с предыдущим не очевидна читателю. Нужно сделать какой-нибудь переходный мостик.
Можем ли мы для конечной или счетной сигнатуры с помощью конечного или счетного числа высказываний описать структуру, которая обязательно будет несчетной? Оказывается — нет!

Задача 6. Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарной подструктуре
Любая бесконечная структура с конечной или счетной сигнатурой содержит счетную элементарную подструктуру.

Подсказка. Будем строить подструктуру так, чтобы потом использовать критерий Тарского – Воота.
Что мы положим в подструктуру?

- Все элементы, для которых уже были имена.
- Все элементы, которые должны найтись по критерию Тарского – Воота — условию (2).
- Повторим счетное число раз.
- Возьмем объединение.

Достаточно ли этого?

В этом плане речь идет о последовательности элементарных расширений. Для его реализации нам будет полезно следующее естественное определение.

Определение 7. Пусть дана конечная или счетная последовательность структур, где каждая структура является подструктурой следующей. *Объединением* этой последовательности является структура, у которой универсумом является объединение (неубывающей) последовательности универсумов членов последовательности; значение каждого имени объекта берется из первой структуры, а значением каждого имени отношения является объединение значений этого имени в элементах последовательности (в каждом элементе — это подмножество прямой степени соответствующего универсума, прямые степени тоже не убывают).

Решение. Перейдем к доказательству теоремы.

Опишем последовательность шагов в построении элементарной подструктуры.
На нулевом шаге отнесем к универсуму подструктуры все объекты, являющиеся значениями имен из сигнатуры. Это — просто требование для подструктур.
Дальше будем стараться выполнить требование (2) критерия Тарского – Воота. Именно, для каждой формулы $\Phi(x, y)$ (все формулы у нас в одной и той же исходной счетной сигнатуре) и каждого набора элементов a уже построенного универсума, для которого найдется b в (возможно, несчетном) универсуме исходной структуры, мы любое (одно!) найденное b добавим в строящийся универсум. Шаг завершается доопределением значений всех имен отношений из сигнатуры на новых элементах в соответствии с их значениями в исходной структуре.
Проделаем описанный выше шаг со всеми формулами счетное число раз. Получим возрастающую последовательность универсумов (каждый раз мы что-то добавляли), возьмем объединение универсумов этой последовательности. Это объединение счетно. Сохраним на этом объединении значения всех элементов сигнатуры. Структура определена и, очевидно, счетна.
Остается доказать, что бесконечное объединение будет элементарной подструктурой первоначальной структуры.
Будем вести индукцию по построению формулы из определения элементарного расширения. Обратим внимание, что там речь идет о любой формуле, эта формула становится «высказыванием», когда мы подставляем в нее элементы структур (точнее, как мы говорили выше, их имена).

- Для атомных формул утверждение тривиально. Для дизъюнкции и отрицания индуктивный шаг тоже тривиален.

- Остается случай существования: формула $\exists y \Phi(x, y)$, причем для формулы $\Phi(x, y)$ требуемая эквивалентность доказана.

  Обозначим через D универсум исходной структуры, через D_0 универсум структуры, с которой мы начали построение, через D^ω — универсум бесконечного объединения.

  Пусть $a \in D^\omega$ и для некоторого $b \in D$ выполнено $\Phi(a, b)$.

  Если b, для которого выполнено $\Phi(a, b)$, найдется в универсуме D_0, то b уже лежит в D^ω. предыдущая фраза лишняя.

> Если вместо Если надо написать «Мы знаем, что» a оказался в D^ω на каком-то конечном шаге. На каком-то следующем шаге была построена структура, в которой лежит и a, и некоторый c, для которого в M выполнено $\Phi(a, c)$. По индуктивному предположению требуемая эквивалентность была выполнена для этой структуры и исходной структуры. Значит она выполнена и для формулы с квантором.

Теорема доказана.

Заметим, что объединение возрастающей цепочки мы уже использовали несколько раз (где?). Эта **большая идея** нам еще пригодится.

Теорема компактности (Мальцева) (Напоминание)
Если любое конечное подмножество теории выполнимо, то теория выполнима.

Из определения следствия и теоремы компактности мы на прошлом занятии занятии? легко получили утверждение следующей задачи, которое можно было бы назвать Теоремой компактности для следствий.

Задача 7. Если высказывание следует из теории, то это высказывание следует из некоторой конечной ее части.

Подсказка. Мы уже решали похожую задачу в случае только счетных теорий.

Решение. Пусть высказывание не следует ни из какой конечной части теории. Тогда для любой конечной части теории существует модель, где это высказывание ложно, а его отрицание истинно. Добавим отрицание высказывания к теории. Тогда любая конечная часть этой новой теории имеет модель. Значит по теореме компактности и вся теория с добавленным отрицанием имеет модель. Но в этой модели должно быть выполнено и само высказывание, что невозможно.

Задача 8. Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарном расширении
Для любой бесконечной нормальной структуры с конечной или счётной сигнатурой существует элементарное нормальное расширение сколь угодно большой мощности.

Подсказка.

– Для данной структуры M рассмотрите теорию $Th(M^@)$
– Следующий шаг: добавим имен, сколько нужно до нужной мощности. Добавим к теории $Th(M^@)$ требование различия (неравенства) для новых имен.
– Теорема компактности (недоказанная для произвольной мощности, но мы разрешаем себе ее использовать) дает существование модели как минимум нужной мощности.

Решение. не дописано