Лекции по математической логике и теории алгоритмов
А. Л. Семенов, 2023
Лекция 7

1 Теория моделей. Определения и примеры

Авторы решений — Василий Платонов и Максим Беспалов.

Логика отношений. Напоминание.
Σ — список имен объектов и имен отношений — сигнатура;
D — универсум (произвольное непустое множество);
$M = \langle D, \Sigma, \text{Зн} \rangle$ — структура.
Как мы помним, Зн — отображение, сопоставляющее каждому имени объекта — объект (элемент) из универсума, каждому имени отношения — отношение на универсуме.
Часто мы фиксируем сигнатуру Σ, а универсум D, значения Зн имен из этой сигнатуры могут меняться.

Определение 1. Векторные обозначения: a — набор (цепочка) элементов $a_1, \ldots, a_k$, λ — пустая цепочка, $A^* = \{\lambda\} \cup A \cup A^2 \cup \ldots$
Таким образом, A^* — это множество всех цепочек (наборов) элементов из A.
Пусть все свободные переменные формулы Φ взяты из списка $x_1, ..., x_k$.
$M \vDash \Phi(a_1, ..., a_k)$ означает, что Φ истинна в M, в контекстах, то есть, последовательностях имен объектов, начинающихся с $a_1, ..., a_k$.

Неформально можно сказать, что в качестве значения каждого x_i при $i = 1, ...k$, выбрано значение a_i. Ясно, что значение Φ не зависит от других элементов контекста.
Например, если M — это множество целых чисел, в сигнатуру входит имя $R(x_1, x_2)$, значение которого — отношение "меньше", значением a_1 является число три, а значением a_2 является число шесть, то выполнено $M \vDash R(a_1, a_2)$.
Если Φ — высказывание, т. е. замкнутая (без свободных переменных) формула, то $M \vDash \Phi$ означает, что формула Φ истинна в M.

Равенство

В структуре полезно иметь среди двухместных отношений совпадение (одинаковость) элементов. Удобно для него использовать имя $=$ — читается «равенство», «равно».
Можно ли для той или иной теории, включив в ее состав какие-то высказывания, добиться, чтобы в любой модели теории значением имени $=$ было совпадение?
Легко понять, что добиться такого нельзя. Действительно, взяв любую теорию, любую модель и любой элемент универсума, можно добавить к универсуму еще один элемент,

«неотличимый» от взятого — такой, что он находится в отношении $=$ со взятым, а в любом другом отношении два рассматриваемых элемента взаимозаменимы.

Определение 2. *Свойствами равенства* называются следующие высказывания в языке с любой сигнатурой, содержащей равенство:

1. Свойства равенства, как отношения эквивалентности.
2. Свойства, связывающие равенство с другими отношениями структуры (равное можно заменить равным).

Задача 1. Выпишите эти свойства в виде высказываний логики отношений.

Подсказка. Определение отношения эквивалентности мы помним. Замену равного на равное достаточно сформулировать для атомных формул в данной сигнатуре.

Решение. Свойства эквивалентности:

$\forall u\ (u = u)$ — *рефлексивность*,

$\forall u, v\ (u = v \to v = u)$ — *симметричность*,

$\forall u, v, w\ (u = v \wedge v = w \to u = w)$ — *транзитивность*,

Свойства замены равного равным:

Для всякого имени отношения $A(x_1, \ldots, x_k)$
$\forall x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k (\bigwedge_{i=1\ldots k} x_i = y_i \wedge A(x_1, \ldots, x_k) \to A(y_1, \ldots, y_k))$.

Определение 3. Теория, в языке которой есть $=$, и она содержит все свойства равенства называется *теорией с равенством*. Если значение символа $=$ — это совпадение элементов, то структура — *нормальная*.

Задача 2. У всякой выполнимой теории с равенством есть нормальная модель.

Подсказка. Возьмите любую модель и постройте новую — в качестве ее элементов возьмите классы эквивалентности для отношения, имя которого – «равенство».

Решение. Пусть M — некоторая модель этой выполнимой теории. Тогда, в силу наличия в теории свойств равенства группы 1, это отношение действительно разбивает универсум M на классы. Объявим множество этих классов универсумом новой структуры.
Определим значения в новой структуре каждого имени отношения из сигнатуры M, как значение того же имени в M на любых представителях классов. Ясно, что в силу свойства равенства из группы 2, такое определение — «корректно», то есть если

мы заменим одного представителя другим, нам не потребуется менять значение имени отношения.
Теперь значением равенства является совпадение элементов — мы так определили элементы и значения имен отношений.
Значение всякой атомной формулы в любом контексте по нашему определению есть ее значение на представителях классов.
Далее аналогичное утверждение для любой формулы доказывается, конечно, индукцией по построению формулы; по ходу дела мы переходим от контекста в построенной структуру к контексту, в котором участвуют представители классов эквивалентности.

Задача 3. Теорема компактности для нормальных моделей. Пусть всякая конечная часть теории с равенством имеет нормальную модель, тогда и вся теория имеет нормальную модель.

Подсказка. Будет ли теория выполнимой?

Решение. По теореме компактности теория выполнима, по предыдущей задаче у нее есть нормальная модель.

Будем дальше считать, что все теории — с равенством, а все модели — нормальные.

Задача 4. Пусть сигнатура содержит только $=$. Каковы модели теории, состоящей из одной формулы:
$\exists x_1, ..., x_n \forall y (y = x_1 \vee ... \vee y = x_n)$?
(Здесь n фиксировано, например, $n = 6$.)

Подсказка. Мы уже взяли в качестве примера $n = 6$. Рассмотрите структуры, в которых число элементов универсума меньше или равно 6, и те, где элементов больше 6.

Решение. Исходя из нашего определения истинности, для данного универсума нам нужно рассмотреть всевозможные контексты, где значениями $x_1, ..., x_n$ взяты какие-то элементы универсума, после чего выяснить, любое ли значение y совпадет с одним из этих значений $x_1, ..., x_n$. Ясно, что это так, как раз когда в универсуме не больше n различных элементов. Иначе, в силу нормальности структуры, значение y не совпадет со значением одного из $x_1, ..., x_n$ при некотором y. Если в нормальной структуре больше n элементов, то при любом выборе $x_1, ..., x_n$ найдется y отличное от каждого из них.

Конечно, вышеприведенное рассуждение выглядит почти тривиальным, и им является.
Задача полезна, поскольку она собирает вместе ряд данных определений.
Следующая задача требует применения важной теоремы, которую мы недавно доказали.

Задача 5. Бывают ли теории, у которых нет бесконечных моделей, но для каждого натурального n есть модель, содержащая n элементов?

Подсказка. Не бывает, надо воспользоваться теоремой компактности.

Решение. Пусть такая (нормальная, в силу нашего соглашения) теория имеется здесь должно быть «теория с равенством». Добавим к ней для всякого n высказывание, утверждающее существование более n неравных объектов.
Любая конечная часть полученной теории имеет модель.
По теореме компактности имеет модель и вся теория.
Противоречие.

Упорядоченные множества и их теории. Напоминание. Теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, $\Gamma_{\mathbb{N}}$

Двухместное отношение R на непустом универсуме — линейный порядок, если выполнены следующие *Аксиомы линейного порядка*:

$\forall u\ (\neg R(u,u))$ — *антирефлексивность* (1),

$\forall u,v,w\ ((R(u,v) \wedge R(v,w)) \to R(u,w))$ — *транзитивность* (2),

$\forall u,v(R(u,v) \vee R(v,u) \vee u = v)$ — *трихотомия* (*линейность*) (3).

Модели системы Аксиом линейного порядка — это структуры, в которых отношение R задает линейный (3) порядок (1, 2). Будем писать $<$ вместо R. Заметим, что ранее мы рассматривали нестрогий линейный порядок.

Задача 6. Доказать следствие из аксиом:

$\forall u,v\ \neg(u < v \wedge v < u)$ — *антисимметричность* Ранее в Определении 7 антисимметричность определялась по другому. И она входила в определение 10 линейного порядка, а теперь объявляется лишь следствием. Более того, имеется еще определение 19 линейного порядка, отличное от определений 10 и текущего. Лучше везде держаться какого-нибудь одного определения линейного порядка и какого-нибудь одного определения антисимметричности.

Подсказка. Для доказательства надо рассмотреть любую модель системы аксиом.

Решение. От противного. Пусть для каких-то a, b выполнено $(a < b \wedge b < a)$, по транзитивности $a < a$, что противоречит антирефлексивности.

Задача 7. Написать определение *линейного порядка без наибольшего элемента.*

Подсказка. Что значит, что элемент наибольший?

Решение. Повторяем определение линейного порядка и добавляем еще одно высказывание:
$\forall u(\neg(u < u))$,

$\forall u, v, w((u < v \wedge v < w) \rightarrow u < w))$,

$\forall u, v(u < v \vee v < u \vee u = v)$,

$\forall u \exists v(u < v)$,
– для всякого элемента найдется больший его.

Обозначения. Примеры моделей этой теории — обычно рассматриваемые числовые множества с порядком, обозначения: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$. Как это обычно принято в математике, мы, «если это не вызывает недоразумения» будем опускать указание на сигнатуру: $<$. Если же сигнатура – иная мы будем это отдельно отмечать, но использовать тот же шрифт для универсумов, например: $\langle \mathbb{N}; +1 \rangle$ будет обозначать структуру, универсум которой составляют натуральные числа, а сигнатура состоит из двухместного отношения $y = x + 1$. Надо уточнить, включаем ли мы по умолчанию в сигнатуру равенство. Ранее было написано, что отныне у нас все теории с равенством, а все модели нормальные, но про сигнатуру ничего не было сказано.

Задача 8. Доказать, что все модели этой теории бесконечны.

Подсказка. Надо построить бесконечную возрастающую последовательность.

Решение. Рассмотрим некоторую модель M этой теории.
Возьмем в ней любой элемент, для него найдется больший, для этого тоже найдется и т.д.
Докажем по индукции, что каждый следующий элемент больше всех предшествующих. Это — следствие транзитивности.
Значит, он не равен ни одному предшествующему (антирефлексивность).иррефлексивность
Таким образом, мы нашли бесконечную последовательность различных элементов универсума.

Задача 9. Написать определение *плотного линейного порядка без наибольшего и наименьшего элемента.*

Подсказка. Надо вспомнить или придумать, что такое "плотный" порядок. Если не получится, посмотреть решение.

Решение. Линейный порядок Лучше сказать «Аксиомы линейного порядка»,

$\forall u, v(u < v \to \exists w(u < w < v))$ — *плотность*,

$\forall u \exists v(v < u)$ — *неограниченность снизу*,

$\forall u \exists v(u < v)$ — *неограниченность сверху*.

Теория, состоящая из перечисленных выше высказываний, обозначается $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.

Задача 10. Привести примеры моделей теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.

Подсказка. Посмотрите на рациональные и действительные числа.

Решение. Проверяем все требования для множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел со стандартным порядком, для множества действительных чисел $\mathbb{R}$ со стандартным порядком. Открытые интервалы (не отрезки!) этих множеств также являются моделями, так же, как и иррациональные числа.

Следующая задача довольно сложная, дополнительная и предлагается для самостоятельного решения тем, кому это покажется интересным.

Задача 11. Можно ли что-то добавить к нашей теории, чтобы отделить $\mathbb{Q}_<$ от $\mathbb{R}_<$, т. е. чтобы первая структура была моделью, а вторая — нет?

Подсказка. Попробуйте придумать какую-то процедуру для элиминации кванторов в логиках отношений двух указанных структур.
Посмотрите, может ли эта процедура дать разные результаты в двух структурах.

Решение. Для дополнительных задач мы не приводим решения, но будем рады рассмотреть решения, предложенные студентами.

Пусть в сигнатуре есть имена для отношения $<$ и для объекта — 0. Выпишем высказывания *теории* $\Gamma_{\mathbb{N}}$:
Линейность Лучше сказать «Аксиомы линейного порядка»

$\forall u(0 < u \lor u = 0)$ — 0 — наименьший,

$\forall u \exists v(u < v \land (\forall w(u < w \to (v = w \lor v < w))))$ – существует следующий,

$\forall u(u \neq 0 \to \exists v(v < u \land (\forall w(w < u \to w = v \lor w < v))))$ – для всех, кроме 0, существует предыдущий.

Мы кратко пояснили словами, что высказывания теории «означают» (смысл).
Полезно нарисовать иллюстрацию.

Задача 12. Приведите примеры моделей этой теории.

Подсказка. Может ли в модели быть элемент, больший всех натуральных чисел?

Решение. Модели этой теории:
$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}+\mathbb{Z}$ (про сумму упорядоченных множеств была задача в лекции 2) Лучше явно указать номер задачи (16).
Есть и другие.

«Одинаковость» структур.

Изоморфизм множеств мы определяли как их равномощность.
Если же на множествах, как на универсумах, заданы какие-то отношения, то изоморфизм будет, во-первых, требовать одинаковости сигнатур, во-вторых, требовать "одинаковости" значений элементов сигнатур.

Определение 4. Пусть две структуры имеют одну общую сигнатуру. Взаимно однозначное отображение универсума одной структуры на универсум другой называется *изоморфизмом структур*, если при этом отображении значение каждого имени в одной структуре переходит в значение того же имени в другой.
С использованием математической символики это определение можно переписать следующим образом.
Пусть даны структуры $M_1 = \langle D_1, \Sigma, \text{Зн}_1 \rangle$ и $M_2 = \langle D_2, \Sigma, \text{Зн}_2 \rangle$.
Изоморфизм — это взаимно однозначное отображение $\psi : D_1 \to D_2$, которое переводит каждый объект в D_1, имеющий имя a из Σ, в объект с тем же именем в D_2, то есть
$\psi(\text{Зн}_1(a)) = \text{Зн}_2(a)$
и для каждого имени отношения $P \in \Sigma$, каждого вектора объектов $v \in D_1^*$, выполнено
$\text{Зн}_1(P)(v) \iff \text{Зн}_2(P)(\psi(v))$.

Задача 13. Изоморфны ли структура положительных рациональных и структура всех рациональных чисел с порядком?

Подсказка. Постройте аналитически, или нарисуйте график монотонного отображения всех рациональных чисел на все положительные.

Решение. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{>0}$, где

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \in \mathbb{Q} \cap [-1, +\infty) \\ -\frac{1}{x}, & x \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, -1) \end{cases}$$

Действительно, $f(\mathbb{Q} \cap [-1, +\infty)) = \mathbb{Q} \cap [1, +\infty)$ и $f(\mathbb{Q} \cap (-\infty, -1)) = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, поэтому образом являются все положительные рациональные. Это сюръекция.

В силу монотонности функций нетрудно удостовериться, что это инъекция и порядок сохраняется. Значит, это изоморфизм.

Задача 14. Изоморфны ли две любые счетные модели $\Gamma_{\mathbb{Q}}$?

Подсказка. Занумеруем натуральными числами каждую из счетных моделей $\Gamma_{\mathbb{Q}}$. Попробуем, чтобы установить изоморфизм, каждый раз брать следующий элемент в том или другом множестве. Надо будет только заботиться о том, что такой элемент найдется, о сохранении порядка и о том, чтобы в конце концов получилась биекция универсумов.

Решение. Да, изоморфны. Покажем что для $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ можно построить изоморфизм между любыми двумя счетными моделями.
Начнем с того, что перенумеруем всеми натуральными числами все рациональные числа и тоже всеми натуральными числами все элементы модели все элементы первой модели и все элементы второй модели.
Будем строить возрастающую последовательность изоморфизмов между конечными подструктурами моделей.

Первым в этой последовательности возьмем пустой изоморфизм.

Пусть уже построен изоморфизм ψ конечных упорядоченных подмножеств двух наших моделей.
Добавим к одному из этих подмножеств S первый (в нашей нумерации) еще не использованный элемент a универсума, где это подмножество лежит. Тогда можно добавить еще не использованный элемент b к подмножеству другой модели так, чтобы между полученными подмножествами имелся изоморфизм, продолжающий ψ. То, что это можно сделать, вытекает из требований $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, нужно рассмотреть случаи, когда a лежит между двумя соседними элементами подмножества S, когда он меньше наименьшего элемента в S и когда больше наибольшего. В каждом из этих случаев имеется бесконечное количество элементов b, которые можно сопоставить с a с сохранением изоморфизма. Возьмем любой из них, например, первый.

Теперь возьмем первый еще не использованный элемент в другом подмножестве — том, где мы только что нашли b. Проделаем те же операции.

Проделав поочередно эти операции счетное число раз, мы получим возрастающую последовательность изоморфизмов. Возьмем их объединение.

Полученное отображение будет изоморфизмом множеств, поскольку каждый элемент каждого из двух множеств был когда-то использован. Кажется, все уже доказано. К чему тогда следующая фраза, смысла которой я не понял. Изоморфность порядков вытекает из того, что любая пара элементов каждой из моделей приняла участие в каком-то конечном изоморфизме.

Наше доказательство использовало несколько больших идей, применяющихся в разных местах нашего курса и математики. В частности, здесь рассматривалось объединение возрастающей последовательности; каждый элемент из объединения возник на конечном шаге и это обеспечивает некоторые его свойства и т. д.

Определение 5. Мы говорим, что две структуры с одной сигнатурой *эквивалентны*, если они имеют одну и ту же теорию.

В литературе вместо «эквивалентны» часто говорят «элементарно эквивалентны».

Задача 15. Почему изоморфные структуры эквивалентны?

Подсказка. Естественно это доказывать индукцией по построению (не обязательно замкнутой) формулы Φ: $M_1 \vDash \Phi(a) \iff M_2 \vDash \Phi(\psi(a))$ в соответствующих контекстах (а какие контексты при этом – "соответствующие"?) Если уж говорить об истинности формул в контексте, то надо писать $M_1 \vDash \Phi \iff M_2 \vDash \Phi$.

Решение. Начнем с того, что установим взаимно однозначное соответствие между контекстами. Для этого вспомним, что у нас есть изоморфизм универсумов (как множеств). Дадим элементам, соответствующим друг другу при этом изоморфизме одно и то же имя, и так для каждой пары таких элементов.
Будем далее действовать индукцией по построению формулы.
Изоморфизм сохраняет отношения, а значит, истинность атомных формул.
Проверка сохранения для логических связок — стандартна.
Утверждение для кванторов вытекает из биекции между контекстами и индуктивного предположения для формулы, на которую навешен квантор.
Значит, множества истинных высказываний, которые задаются формулами, также обязаны совпадать. Высказывание по определению всегда является формулой, поэтому слово «задаются» неуместно. По уровню подробности это решение скорее является подсказкой к решению.

Естественно возникает вопрос:

Бывают ли эквивалентные неизоморфные структуры?

Мы попытаемся это выяснить в следующих лекциях.