Лекции по математической логике и теории алгоритмов
А. Л. Семенов, 2023
Лекция 7

1 Теория моделей. Определения и примеры

Логика отношений. Напоминание.
Σ — список имен объектов и имен отношений — сигнатура;
D — универсум (произвольное непустое множество);
$M = \langle D, \Sigma, \text{Зн} \rangle$ — структура.
Как мы помним, Зн — отображение, сопоставляющее каждому имени объекта — объект (элемент) из универсума, каждому имени отношения — отношение на универсуме.
Часто мы фиксируем сигнатуру Σ, а универсум D, значения Зн имен из этой сигнатуры могут меняться.

Определение 1. Векторные обозначения: a — набор (цепочка) элементов $a_1, \ldots, a_k$, λ — пустая цепочка, $A^* = \{\lambda\} \cup A \cup A^2 \cup \ldots$
Таким образом, A^* — это множество всех цепочек (наборов) элементов из A.
Пусть все свободные переменные формулы Φ взяты из списка $x_1, ..., x_k$.
$M \vDash \Phi(a_1, ..., a_k)$ означает, что Φ истинна в M, в контекстах, то есть, последовательностях имен объектов, начинающихся с $a_1, ..., a_k$.

Неформально можно сказать, что в качестве значения каждого x_i при $i = 1, ...k$, выбрано значение a_i. Ясно, что значение Φ не зависит от других элементов контекста.
Например, если M — это множество целых чисел, в сигнатуру входит имя $R(x_1, x_2)$, значение которого — отношение "меньше", значением a_1 является число три, а значением a_2 является число шесть, то выполнено $M \vDash R(a_1, a_2)$.
Если Φ — высказывание, т. е. замкнутая (без свободных переменных) формула, то $M \vDash \Phi$ означает, что формула Φ истинна в M.

Равенство

В структуре полезно иметь среди двухместных отношений совпадение (одинаковость) элементов. Удобно для него использовать имя $=$ — читается «равенство», «равно».
Можно ли для той или иной теории, включив в ее состав какие-то высказывания, добиться, чтобы в любой модели теории значением имени $=$ было совпадение?
Легко понять, что добиться такого нельзя. Действительно, взяв любую теорию, любую модель и любой элемент универсума, можно добавить к универсуму еще один элемент, «неотличимый» от взятого — такой, что он находится в отношении $=$ со взятым, а в любом другом отношении два рассматриваемых элемента взаимозаменимы.

Определение 2. *Свойствами равенства* называются следующие высказывания в языке с любой сигнатурой, содержащей равенство:

1. Свойства равенства, как отношения эквивалентности.
2. Свойства, связывающие равенство с другими отношениями структуры (равное можно заменить равным).

Задача 1. Выпишите эти свойства в виде высказываний логики отношений.

Подсказка. Определение отношения эквивалентности мы помним. Замену равного на равное достаточно сформулировать для атомных формул в данной сигнатуре.

Определение 3. Теория, в языке которой есть $=$, и она содержит все свойства равенства называется *теорией с равенством.* Если значение символа $=$ — это совпадение элементов, то структура — *нормальная.*

Задача 2. У всякой выполнимой теории с равенством есть нормальная модель.

Подсказка. Возьмите любую модель и постройте новую — в качестве ее элементов возьмите классы эквивалентности для отношения, имя которого – «равенство».

Задача 3. Теорема компактности для нормальных моделей. Пусть всякая конечная часть теории с равенством имеет нормальную модель, тогда и вся теория имеет нормальную модель.

Подсказка. Будет ли теория выполнимой?

Будем дальше считать, что все теории — с равенством, а все модели — нормальные.

Задача 4. Пусть сигнатура содержит только $=$. Каковы модели теории, состоящей из одной формулы:
$\exists x_1, ..., x_n \forall y (y = x_1 \vee ... \vee y = x_n)$?
(Здесь n фиксировано, например, $n = 6$.)

Подсказка. Мы уже взяли в качестве примера $n = 6$. Рассмотрите структуры, в которых число элементов универсума меньше или равно 6, и те, где элементов больше 6.

Конечно, вышеприведенное рассуждение выглядит почти тривиальным, и им является. Задача полезна, поскольку она собирает вместе ряд данных определений.
Следующая задача требует применения важной теоремы, которую мы недавно доказали.

Задача 5. Бывают ли теории, у которых нет бесконечных моделей, но для каждого натурального n есть модель, содержащая n элементов?

Подсказка. Не бывает, надо воспользоваться теоремой компактности.

Упорядоченные множества и их теории. Напоминание. Теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, $\Gamma_{\mathbb{N}}$

Двухместное отношение R на непустом универсуме — линейный порядок, если выполнены следующие *Аксиомы линейного порядка*:

$\forall u\ (\neg R(u,u))$ — *антирефлексивность* (1),

$\forall u,v,w\ ((R(u,v) \wedge R(v,w)) \rightarrow R(u,w))$ — *транзитивность* (2),

$\forall u,v(R(u,v) \vee R(v,u) \vee u = v)$ — *трихотомия* (*линейность*) (3).

Модели системы Аксиом линейного порядка — это структуры, в которых отношение R задает линейный (3) порядок (1, 2). Будем писать $<$ вместо R. Заметим, что ранее мы рассматривали нестрогий линейный порядок.

Задача 6. Доказать следствие из аксиом:

$\forall u,v\ \neg(u < v \wedge v < u)$ — *антисимметричность* Ранее в Определении 7 антисимметричность определялась по другому. И она входила в определение 10 линейного порядка, а теперь объявляется лишь следствием. Более того, имеется еще определение 19 линейного порядка, отличное от определений 10 и текущего. Лучше везде держаться какого-нибудь одного определения линейного порядка и какого-нибудь одного определения антисимметричности.

Подсказка. Для доказательства надо рассмотреть любую модель системы аксиом.

Задача 7. Написать определение *линейного порядка без наибольшего элемента.*

Подсказка. Что значит, что элемент наибольший?

Обозначения. Примеры моделей этой теории — обычно рассматриваемые числовые множества с порядком, обозначения: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$. Как это обычно принято в математике, мы, «если это не вызывает недоразумения» будем опускать указание на сигнатуру: $<$. Если же сигнатура – иная мы будем это отдельно отмечать, но использовать тот же шрифт для универсумов, например: $\langle \mathbb{N}; +1 \rangle$ будет обозначать структуру, универсум которой составляют натуральные числа, а сигнатура состоит из двухместного отношения $y = x + 1$. Надо уточнить, включаем ли мы по умолчанию в сигнатуру равенство. Ранее было написано, что отныне у нас все теории с равенством, а все модели нормальные, но про сигнатуру ничего не было сказано.

Задача 8. Доказать, что все модели этой теории бесконечны.

Подсказка. Надо построить бесконечную возрастающую последовательность.

Задача 9. Написать определение *плотного линейного порядка без наибольшего и наименьшего элемента.*

Подсказка. Надо вспомнить или придумать, что такое "плотный" порядок. Если не получится, посмотреть решение.

Теория, состоящая из перечисленных выше высказываний, обозначается $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.

Задача 10. Привести примеры моделей теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.

Подсказка. Посмотрите на рациональные и действительные числа.

Следующая задача довольно сложная, дополнительная и предлагается для самостоятельного решения тем, кому это покажется интересным.

Задача 11. Можно ли что-то добавить к нашей теории, чтобы отделить $\mathbb{Q}_<$ от $\mathbb{R}_<$, т. е. чтобы первая структура была моделью, а вторая — нет?

Подсказка. Попробуйте придумать какую-то процедуру для элиминации кванторов в логиках отношений двух указанных структур.
Посмотрите, может ли эта процедура дать разные результаты в двух структурах.

Пусть в сигнатуре есть имена для отношения $<$ и для объекта — 0. Выпишем высказывания *теории* $\Gamma_{\mathbb{N}}$:
Линейность Лучше сказать «Аксиомы линейного порядка»

$\forall u(0 < u \vee u = 0)$ — 0 — наименьший,

$\forall u \exists v(u < v \wedge (\forall w(u < w \to (v = w \vee v < w))))$ – существует следующий,

$\forall u(u \neq 0 \to \exists v(v < u \wedge (\forall w(w < u \to w = v \vee w < v))))$ – для всех, кроме 0, существует предыдущий.

Мы кратко пояснили словами, что высказывания теории «означают» (смысл).
Полезно нарисовать иллюстрацию.

Задача 12. Приведите примеры моделей этой теории.

Подсказка. Может ли в модели быть элемент, больший всех натуральных чисел?

«Одинаковость» структур.

Изоморфизм множеств мы определяли как их равномощность.
Если же на множествах, как на универсумах, заданы какие-то отношения, то изоморфизм будет, во-первых, требовать одинаковости сигнатур, во-вторых, требовать "одинаковости" значений элементов сигнатур.

Определение 4. Пусть две структуры имеют одну общую сигнатуру. Взаимно однозначное отображение универсума одной структуры на универсум другой называется *изоморфизмом структур*, если при этом отображении значение каждого имени в одной структуре переходит в значение того же имени в другой.
С использованием математической символики это определение можно переписать следующим образом.
Пусть даны структуры $M_1 = \langle D_1, \Sigma, \text{Зн}_1 \rangle$ и $M_2 = \langle D_2, \Sigma, \text{Зн}_2 \rangle$.
Изоморфизм — это взаимно однозначное отображение $\psi : D_1 \to D_2$, которое переводит каждый объект в D_1, имеющий имя a из Σ, в объект с тем же именем в D_2, то есть
$\psi(\text{Зн}_1(a)) = \text{Зн}_2(a)$
и для каждого имени отношения $P \in \Sigma$, каждого вектора объектов $v \in D_1^*$, выполнено
$\text{Зн}_1(P)(v) \iff \text{Зн}_2(P)(\psi(v))$.

Задача 13. Изоморфны ли структура положительных рациональных и структура всех рациональных чисел с порядком?

Подсказка. Постройте аналитически, или нарисуйте график монотонного отображения всех рациональных чисел на все положительные.

Задача 14. Изоморфны ли две любые счетные модели $\Gamma_{\mathbb{Q}}$?

Подсказка. Занумеруем натуральными числами каждую из счетных моделей $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.
Попробуем, чтобы установить изоморфизм, каждый раз брать следующий элемент в том или другом множестве. Надо будет только заботиться о том, что такой элемент найдется, о сохранении порядка и о том, чтобы в конце концов получилась биекция универсумов.

Наше доказательство использовало несколько больших идей, применяющихся в разных местах нашего курса и математики. В частности, здесь рассматривалось объединение возрастающей последовательности; каждый элемент из объединения возник на конечном шаге и это обеспечивает некоторые его свойства и т. д.

Определение 5. Мы говорим, что две структуры с одной сигнатурой *эквивалентны*, если они имеют одну и ту же теорию.

В литературе вместо «эквивалентны» часто говорят «элементарно эквивалентны».

Задача 15. Почему изоморфные структуры эквивалентны?

Подсказка. Естественно это доказывать индукцией по построению (не обязательно замкнутой) формулы Φ: $M_1 \vDash \Phi(a) \iff M_2 \vDash \Phi(\psi(a))$ в соответствующих контекстах (а какие контексты при этом – "соответствующие"?) Если уж говорить об истинности формул в контексте, то надо писать $M_1 \vDash \Phi \iff M_2 \vDash \Phi$.

Естественно возникает вопрос:

Бывают ли эквивалентные неизоморфные структуры?

Мы попытаемся это выяснить в следующих лекциях.