Лекции по математической логике и теории алгоритмов
А. Л. Семенов, 2022
Лекция 5

1 Модальная логика

Логика высказываний — логика отношений, где все имена отношений нульместные, нет переменных и кванторов. Нульместные имена отношений в данной лекции мы называем просто именами, других имен у нас не будет.

Определение 1. (Язык модальной логики) Фиксируется некоторое конечное или счетное множество имен. К языку логики высказываний добавляется символ *модальности* $\Box$, синтаксически подобный отрицанию. Это символ читается "необходимо".

Модели естественного языка и рассуждения, которые формализует $\Box$ (A):

1. Необходимо A
2. Всегда A
3. Должно быть A
4. Известно, что A
5. Считается, что A
6. Утверждение A доказуемо
7. После завершения программы выполнено A

Другие модальности — похожие и не похожие на необходимость: желательно, вероятно, запрещено, хорошо, удобно... К некоторым из них мы вернемся в конце лекции.

Задача 1. Дать определение формулы модальной логики и доказать, что для любой формулы Θ выполнено ровно одно:

- Θ — имя,
- $\Theta = \neg(\Phi)$, где Φ — формула, однозначно определяемая по формуле Θ,
- $\Theta = \Box(\Phi)$, где Φ — формула, однозначно определяемая по формуле Θ,
- $\Theta = (\Phi)\ \tau\ (\Psi)$, где τ — двухместная связка, Φ, Ψ — формулы, связка и обе формулы однозначно определяются по формуле Θ.

Подсказка. Вспомните, как аналогичное утверждение доказывалось для логики отношений.

Решение. Определение дадим аналогичное обыкновенной формуле из лекции 3:
– атомные формулы являются модальными формулами.

для любых модальных формул A и B:
– $\neg(A)$,
– $\Box(A)$
– $(A) \wedge (B)$,
– $(A) \vee (B)$,
– $(A) \to (B)$,
– $(A) \equiv (B)$
являются модальными формулами.
Доказательство однозначности анализа копирует доказательство для логики отношений.

Сол (Саул) Крипке предложил формальное определение семантики для модальной логики, варианты которого соответствуют различным интуитивным пониманиям модальности.
Определение Крипке мы начинаем с технического понятия шкалы.

Определение 2. (Шкала Крипке)
Шкала Крипке — любая пара $F = \langle S, R \rangle$, где S — произвольное непустое множество *миров*, R — произвольное двухместное *отношение (граф) достижимости* (одного мира из другого).

Далее мы используем понятие «контекста», отличающееся от того, которое ввели выше в случае логики отношений. Также мы используем в случае модальной логики понятие «формулы» и т.д. Можно было бы каждый раз указывать «формула модальной логики», «контекст модальной логики» и т. д., но надеемся, что для читателей это излишне. В то же время использование одного и того же термина помогает читателю увидеть сходство ситуаций и это полезно для понимания.

Определение 3. (Семантика модальной логики)
Контекст: отображение V, которое каждое имя p отображает в множество миров $V(p)$.
Значение формулы Φ *в мире* s *шкалы* F *в контексте* V обозначается $\text{Зн}(\Phi, s, F, V)$
Значение — это И или Л, определяется оно индуктивно:
Для каждого имени p: $\text{Зн}(p, s, F, V) \iff s \in V(p)$
(иначе говоря, $\text{Зн}(p, s, F, V) = \text{И} \iff s \in V(p)$)
$\text{Зн}(\Box(\Phi), s, F, V) = \bigwedge \text{Зн}(\Phi, t, F, V)$ по всем t, достижимым в F из s (конъюнкция может оказаться бесконечной).
Остальное — как в логике высказываний.

Таким образом, если зафиксировать шкалу, контекст и мир, то значением формулы оказывается И или Л.

Задача 2. Зафиксируем шкалу и контекст и рассмотрим множество миров, в которых данная формула истинна. Какие операции на множествах миров соответствуют связкам логики высказываний, используемым при построении формулы? Как можно описать операцию на множестве миров, отвечающую необходимости?

Подсказка. Порисуйте графы — шкалы Крипке.

Решение. $(A) \vee (B)$ — объединение множеств миров.
$(A) \wedge (B)$ — пересечение множеств миров.
$\neg(A)$ — дополнение к множеству миров для A.
$(A) \to (B)$ эквивалентно $(\neg A) \vee B$ — объединение миров, где A ложно, и миров, где B истинно.
$(A) \equiv (B)$ эквивалентно $(A \to B) \wedge (B \to A)$ — раскладывается на предыдущие связки.
$\Box(A)$ — множество таких миров, что из них достижимы только те миры, где A истинно.

Вышеприведенное определение можно интерпретировать следующим образом. Значением формулы является множество миров, где она истинна, значение необходимости — истинность для всех достижимых, т.е. "альтернативных" миров.

Заметим, что в определении шкалы мы вовсе не требуем достижимости мира из самого себя. Это выглядит несколько неестественным, но такая свобода от ограничений оказывается полезной в некоторых приложениях.

Определение 4. (Истинность формулы модальной логики, обозначения.)
Отношение «формула A истинна в мире s шкалы F в контексте V» обозначается $F, s, V \vDash A$.
Формула A *истинна в шкале* F, обозначение: $F \vDash A$, если она истинна в любом мире этой шкалы в любом контексте.
Формула *истинна*, если она истинна в любой шкале. Обозначение: $\vDash A$.
Иногда, чтобы подчеркнуть всеобщую истинность (истинность в любой шкале), вместо "истинна" говорят "*общезначима*".

В следующем тексте мы опускаем скобки в формулах типа $\Box(A)$. Их легко восстановить.

Задача 3. $\vDash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

Подсказка. Основное здесь — вспомнить определение значения формулы с $\Box$.

Решение. Фиксируем шкалу, контекст и мир. Пусть $\Box(A \to B)$ истинно.
Тогда $A \to B$ — истинна во всех достижимых (из взятого мира).
Пусть, далее, $\Box A$ — истинна.

Тогда A — истинна во всех достижимых.
Значит, B — истинна во всех достижимых и $\Box B$ — истинна.

Для общезначимых формул логики высказываний используется еще один термин.

Определение 5. (Тавтология)
Тавтология — формула логики высказываний, истинная в любой структуре.

Задача 4. Придумайте способ (алгоритм) выяснения, является ли формула логики высказываний тавтологией.

Подсказка. Как бы вы стали проверять выполнимость формулы?

Решение. Множество имен в формуле конечно, причем каждое из них принимает либо **И**, либо **Л** в качестве значения. Если для всех комбинаций формула истинна, то она является тавтологией. Если нет, то не является. Таким образом, искомый алгоритм состоит в переборе всех комбинаций значений имен.
Для фиксированной комбинации значений имен вычисление значения формулы происходит индукцией по ее построению. Зная значения составляющих формулу, мы по таблицам для логических связок находим значение составной формулы.

Для того, чтобы установить истинность формулы модальной логики, надо «рассмотреть», «перебрать» бесконечное множество шкал и т.д.
Хорошо бы иметь какой-то способ постепенно получать все истинные формулы. В только что разобранном примере использовались "рассуждения".

Рассматривая различные логические языки, можно пытаться придумать для данного понятия истинности, данной семантики некоторый общий способ рассуждения, позволяющий получать в точности истинные формулы, и «формализовать» его.
Так возникает понятие исчисления. Пример "полуформализованного" исчисления — школьная геометрия. В ней есть аксиомы и правила рассуждения — правила вывода: «рассмотрим все случаи», «предположим противное»...

Определение 6. (Исчисление)
Исчисление — индуктивное определение *выводимости*: множества *выводимых* формул. Исчисление задается аксиомами и правилами вывода: все аксиомы считаются выводимыми, правила вывода позволяют получать из выводимых формул выводимые.

Например, определение формулы ранее в нашем курсе было описанием конкретного исчисления. Например, можно считать, что аксиомами являются атомные формулы, а правила вывода – это правила образования составных формул из более простых с

помощью скобок, связок и кванторов. Общее понятие исчисления мы более подробно рассмотрим позднее.
Общее понятие исчисления мы рассмотрим в наших лекциях позднее.

Определение 7. (Выводимость в исчислении K)
Индуктивное определение *выводимости в исчислении* K.

Аксиомы исчисления K

Подстановки формул вместо имен в тавтологии — выводимы.

Задача 5. Дайте определение подстановки формул вместо имен.

Подсказка. Попробуйте определить подстановку индукцией по построению формулы.

Решение. Пусть все различные имена, встречающиеся в формуле Φ, образуют список. Поставим в соответствие каждому элементу этого списка некоторую формулу. Указанное соответствие – множество пар, будем называть подстановкой.
Результат подстановки в формулу Φ определяется индуктивно. Подстановка в имя состоит в замене этого имени на формулу, ему соответствующую. Действие подстановки "коммутирует"с образованием формулы: подстановка в конъюнкцию есть конъюнкция подстановок и т. д.

Все формулы вида $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ — выводимы.

Правила вывода исчисления K:

Если A, $A \to B$ — выводимы, то
B — выводима (*modus ponens – MP*).

Если A — выводима, то
$\Box A$ — выводима (*усиление*)

Исчисление K отражает некоторые черты содержательного понятия “необходимости”.

В следующих задачах мы связываем исчисление K с понятием истинности, которое мы определили ранее.

Задача 6. Подстановка формул вместо имен в тавтологию дает истинную формулу модальной логики.

Подсказка. Значение формулы определяется значением входящих в нее имен.

Решение. Тавтология по определению истинна для любых значений имен. Если в качестве значений этих имен подставим значения формул, то она все еще будет истинной.

Задача 7. Доказать, что для любых формул A, B
Если $F \vDash A$ и $F \vDash A \to B$, то $F \vDash B$.
Если $F \vDash A$, то $F \vDash \Box A$.

Подсказка. Обратитесь к определениям.

Решение. а) A и $A \to B$ истинны в любом мире и любом контексте данной шкалы. Но тогда B также истинно в любом одном мире и любом одном контексте по определению импликации (см. таблицу истинности).
б) A истинно в любом мире и контексте данной шкалы F. Если мы выберем один конкретный мир, то все достижимые миры должны быть подмножеством множества "любых миров". То есть на них A также истинно. Значит, $\Box A$ истинно по определению.

Напомним, что для модальной логики формула является истиной, если ее значение в любой шкале — это И. В других логических системах определение аналогично.

Определение 8. *Непротиворечивость* исчисления — выводимы только истины.

Задача 8. Теорема о непротиворечивости Любая выводимая в исчислении формула модальной логики истинна.

Подсказка. Доказательство нужно вести индукцией по определению выводимости.

Решение. Исчисление было определено индуктивно, эту теорему докажем также индуктивно.
Как мы заметили выше, подстановки вместо имен в тавтологии истинны по определению
Формулы вида
$\vDash \Box(A \to B) \to (\Box A \to B)$ выводимы по предыдущей задаче.
Если формула выводима, то она получена из каких-то выводимых формул по правилу вывода. Эти формулы — истины по индуктивному предположению. Но тогда по предыдущей задаче (говорящей на самом деле о правилах вывода) и рассматриваемая формула обязана быть истинной.

Определение 9. *Полнота* исчисления — все истины выводимы.

Теорема о полноте
Любая истинная формула модальной логики выводима в исчислении .

Мы не будем доказывать теорему о полноте. Можем обсудить доказательство этой теоремы с желающими. Оно также есть в конспектах лекций 2012 – 14 гг. на сайте Кафедры математической логики и теории алгоритмов МГУ.
Таким образом, предложенная Крипке семантика истинности соответствует описанному понятию выводимости.

Продолжим наше обсуждение модальностей.
Попытаемся как-то, используя понятие «необходимости», определить «возможность».
Принятое обозначение для возможности — это $\Diamond$.

Задача 9. Попытайтесь определить «возможность» в модальной логике «необходимости».

Подсказка. Возможность чего-то — это отрицание необходимости не этого.

Решение. $\Diamond A := \neg(\Box(\neg A))$. Действительно, если $\Diamond A$ истинно, то не во всяком достижимом мире A ложно. Значит, существует хотя бы один достижимый мир, где A истинно. Этим и объясняется "возможность".

Задача 10. Если потребовать истинности каких-либо не выводимых формул, то класс шкал, где будут истинны еще и эти формулы, сузится.
И обратно, если сужать класс шкал, то класс истинных в шкалах формул может расшириться.

Подсказка. Если мы добавляем требования к элементам множества, то из множества, возможно что-то придется выбросить.

Решение. Если формула невыводима, то может существовать шкала, где она ложна (то есть не выполнена). Значит, требование выполнения невыводимой формулы либо сохраняет множество шкал, либо исключает из него некоторые элементы (сужает).
Наоборот: если формула не выполнена для некоторых шкал, но их исключить из класса шкал, то эта формула станет на оставшихся истинной, в силу чего класс истинных во всех шкалах формул расширится.

Естественно рассмотреть шкалы, где отношение достижимости удовлетворяет, например, условиям: рефлексивности, транзитивности, антисимметричности, симметричности и т.д.
С другой стороны, можно рассматривать исчисления, где мы требуем, например, что: из необходимости некоторого утверждения следовало оно само, из необходимости необходимости следовала необходимость утверждения и т.д.

Возникают исчисления, классы шкал и задача установления соответствия между ними. Это основная задача модальной логики, как раздела математической логики. При этом есть и другие способы построения семантики и там также возникают интересные проблемы.