Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Львович Семенов

Заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов
Академик Российской академии наук
и Российской академии образования

Лекция 14. Обзор курса

План курса:

1. Множества.
2. Вполне упорядоченные множества. Аксиома выбора.
3. Языки. Синтаксис и семантика
4. Определимость в поле действительных чисел.
5. Модальная логика.
6. Построение модели. Компактность.
7. Классы структур и теории. Соответствие Галуа
8. Теория моделей. Элементарные расширения
9. Теория моделей. Полнота и категоричность
10. Теория определимости. Автоморфизмы
11. Алгоритмы и исчисления. Вычислимые функции и породимые множества. Машины и грамматики.
12. Теория сложности.
13. Математика, как аксиоматическая теория. Неполнота
14. Большие идеи и имена математической логики и теории алгоритмов.

Дополнительные главы

15. Доказательство полноты исчисления для модальной логики

16. Доказательство полноты автоморфизмов

Множества.

1. Принадлежность множеству, включение множеств. Операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение, прямое произведение.
2. Отношение, как подмножество прямого произведения, характеристические функции, свойства со значением И или Л.
3. Отображения: инъективные, сюръективные, биективные.
4. Специальные виды двухместных отношений: эквивалентность, порядок, дерево.
5. Лемма Кёнига.
6. Счетные множества. Несчетность множества последовательностей нулей и единиц.
7. Теорема Кантора – Бернштейна.

Вполне упорядоченные множества. Аксиома выбора.

1. Определение фон Неймана натуральных чисел в теории множеств.
2. Полное упорядочение. Предельные и не предельные элементы.
3. Индуктивное доказательство для вполне упорядоченных множеств.
4. Индуктивное определение функции на вполне упорядоченном множестве.
5. Свойства начальных отрезков вполне упорядоченных множеств.
6. Единственность вложения для вполне упорядоченных множеств.
7. Возможность сравнения вполне упорядоченных множеств
8. Функция выбора. Существование функции выбора для вполне упорядоченного множества.
9. Теорема Цермело о возможности полного упорядочения.
10. Аксиома выбора.
11. Возможность сравнения любых множеств по мощности.
12. Теорема Банаха – Тарского (без доказательства). Аксиома детерминированности игр.

Языки. Синтаксис и семантика

1. Имена и значения. Значения составных имен. Задача анализа составного имени. Скобки.
2. Сигнатура и структура. Значения имен объектов и отношений.
3. Язык логики отношений. Индуктивное определение формул (синтаксис).
4. Анализ формул. Однозначность
5. Переменные. Контекст в универсуме. Термы, значения термов в контексте.
6. Атомные формулы, их значение в контексте.
7. Значение формул логики отношений.
8. Связанные и свободные вхождения переменных. Свободные переменные формулы.
9. Отношения, определяемы формулами – бесконечноместное и на конечной степени универсума.
10. Высказывания. Истинность высказывания в структуре. Выполнимость высказывания.
11. Эквивалентные формулы. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ).
12. Предваренная нормальная форма.
13. Игровая семантика логики отношений.

Определимость в поле действительных чисел.

1. Поле действительных чисел. Фиксация языка для логики отношений в поле действительных чисел
2. Алгебра многочленов. Операция модифицированного деления.
3. Алгебра многочленов. Ключевые соображения о знаках и корнях.
4. Алгебра многочленов. Диаграммы.
5. Алгебра многочленов. Операции редукции.
6. Алгебра многочленов. Построение последовательности семейств.
7. Алгебра многочленов. Построение большой диаграммы.
8. Элиминация кванторов. Алгоритм выяснения истинности высказываний – разрешимость утверждений алгебры и геометрии.

Модальная логика.

1. Модальная логика. Содержательный смысл модальностей.
2. Модальная логика. Индуктивное построение формул.
3. Модальная логика. Семантика Крипке.
4. Модальная логика. Свойства истинности.
5. Модальная логика. Выводимость. Непротиворечивость. Полнота (без доказательства).

Компактность для логики высказываний.

1. Пространство двоичных последовательностей. Окрестности, покрытия, открытые и замкнутые множества.
2. Теорема компактности для пространства двоичных последовательностей.
3. Теорема компактности для компактного топологического пространства.
4. Теорема компактности для логики высказываний.

Построение модели теории. Компактность для логики отношений.

1. Техническое определение теории логики отношений, как пары множеств утверждений и опровержений. Определения модели теории, локально выполнимой теории. План построения модели теории и доказательства теоремы компактности.
2. Один шаг построения дерева выполнимости для теории.
3. Организация процесса рассмотрения формул и выбор цепи в построении модели для теории.
4. Проверка сохранения локальной выполнимости в построении теории.
5. Теорема компактности для счетного языка,
6. Перечислимость множества следствий теории. Перечислимость истин.
7. Теорема компактности для любого языка (без доказательства). (Теорема Геделя – Мальцева).

Структуры и теории.

1. Равенство в структуре. Нормальные структуры. Теория с равенством.
2. Существование нормальной модели для теории с равенством.
3. Теории линейного порядка, линейного порядка без наибольшего элемента, плотного линейного порядка без наибольшего и наименьшего элемента, дискретного линейного порядка с наименьшим и без наибольшего элемента. Примеры моделей этих теорий.
4. Изоморфизм структур.
5. Изоморфизм плотных порядков без наибольшего и наименьшего элемента.
6. Теория структуры и класса структур.
7. Соответствие Галуа между теориями и классами структур.

Теория моделей.

1. Эквивалентность структур. Соотношение с изоморфизмом структур.
2. Элементарное расширение и элементарная подструктура структуры.
3. Критерий Тарского – Воота элементарного расширения.
4. Теорема Левегейма – Сколема об элементарной подструктуре.
5. Теорема Левегейма – Сколема об элементарном расширении.
6. Полные теории. Существование пополнения.
7. ω-категоричность. ω-категоричность плотного порядка без наибольшего и наименьшего.
8. Признак Лося – Воота полноты теории.
9. Нестандартные модели дискретного порядка с наименьшим элементом без наибольшего.
10. Сверхбольшая теория для дискретного порядка с наименьшим элементом без наибольшего.
11. Сверхбольшая структура – модель дискретного порядка с наименьшим элементом без наибольшего.
12. Пример полной, не ω-категоричной теории. Доказательство и обсуждение.

Теория определимости.

1. Определимость отношения через множество отношений. Решетка определимости.
2. Автоморфизмы структур. Соответствие Галуа между решеткой определимости и решеткой замкнутых надгрупп автоморфизмов.
3. Примеры автоморфизмов и не определимости для решетки определимости порядка рациональных чисел.
4. Теорема Свенониуса, без доказательства.

Алгоритмы и исчисления. Вычислимые функции, породимые, перечислимые, разрешимые множества.

1. Алгоритмы. Вычислимые функции.
2. Перечислимые и разрешимые множества. Операции над ними
3. Кодирование
4. Универсальная вычислимая функция.
5. Пример перечислимого не разрешимого множества.
6. Исчисления.
7. Породимые множества.
8. Выводы. Выводимость в исчислении. Существование выводов у породимых объектов.
9. Равнообъемность перечислимости и породимости.
10. Машина Тюринга. Тезис Черча.
11. Грамматики. Тезис Поста.

Теория сложности.

1. Сложность объектов. Теорема Колмогорова.
2. Сложность вычислений. Определения.
3. Задачи, решаемые перебором. Определение и примеры.
4. Универсальность задачи выполнимости формулы логики высказываний.
5. Проблема перебора.

Математика, как аксиоматическая теория.

1. Попытка Кантора аксиоматизации теории множеств. Парадокс Рассела.
2. Теория ZF. Примеры аксиом.
3. Исчисление отношений.
4. Теория ZFC. Теоремы.
5. Достижение Лобачевского. Основания непротиворечивости геометрий.
6. Программа Гильберта.
7. Парадокс Лжеца. Кодирование формул. Определимость подстановки.
8. Теорема Геделя – Тарского о неопределимости истины.
9. Определимость доказуемости в Программе Гильберта. Теорема Геделя о неполноте.
10. Независимость в теории множеств (без доказательства).

Большие идеи математической логики и теории алгоритмов.

1. Большая идея индуктивного определения формулы, однозначности анализа и индукции по построению и ее применения.
2. Большая идея значения составного имени и ее применения.
3. Большая идея двоичного кодирования и ее применения.
4. Большая идея формулы и алгоритма, как цепочки символов, являющейся объектом – аргументом формул и алгоритмов и ее применения.
5. Большая идея компактности и ее применения.
6. Большая идея объединения возрастающей цепи и ее применения.
7. Большая идея челночного построения соответствия и ее применения.
8. Большая идея универсальности и ее применения.
9. Большая идея глобального поведения, определяемого локальными правилами.

Лекция 14. Обзор курса

План курса:

1. Множества.
2. Вполне упорядоченные множества. Аксиома выбора.
3. Языки. Синтаксис и семантика
4. Определимость в поле действительных чисел.
5. Модальная логика.
6. Построение модели. Компактность.
7. Классы структур и теории. Соответствие Галуа
8. Теория моделей. Элементарные расширения
9. Теория моделей. Полнота и категоричность
10. Теория определимости. Автоморфизмы
11. Алгоритмы и исчисления. Вычислимые функции и породимые множества. Машины и грамматики.
12. Теория сложности.
13. Математика, как аксиоматическая теория. Неполнота
14. Большие идеи и имена математической логики и теории алгоритмов.

Дополнительные главы

15. Доказательство полноты исчисления для модальной логики

16. Доказательство полноты автоморфизмов