# Математическая логика и теория алгоритмов

**Алексей Львович Семенов**

Заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов
Академик Российской академии наук
и Российской академии образования

# Лекция 13. Формализация Математики. Неполнота

## План:

- Задача аксиоматического построения математики
- Аксиомы Кантора. Парадокс Рассела
- Аксиомы теории множеств Цермело – Френкеля
- Исчисление отношений
- Неопределимость истины
- Различие истинности и доказуемости
- Независимость в теории множеств

# Аксиоматическая теория множеств

## Исходная Большая идея

Построить систему доказательства для всей математики, аналогичную, например, аксиоматике геометрии Евклида – Георг Кантор

Исходные понятия – множества; отношения: принадлежность ∈, равенство =

Пример. Натуральные числа по фон Нейману – множества.

Аксиомы.

Связь ∈, =

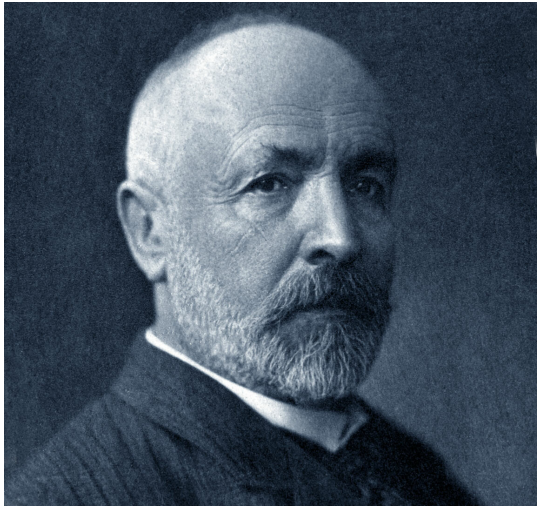
Если у двух множеств одни и те же элементы, то множества равны (**Аксиома объемности**)

$\forall u, v\ (\forall w (w \in u \leftrightarrow w \in v) \to u = v)$

**Существование множеств**

Если мы описали множество формулой, то оно существует:

**для любой формулы Φ: $\exists s \forall v\ (v \in s \leftrightarrow \Phi(v))$**



Ге́орг Ка́нтор
*Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor*
1845—1918

# Парадоксы

$\Phi(x) = x \notin x$ (Ф описывает множества, которые не принадлежат себе)

$\exists s\, \forall v\, (v \in s \leftrightarrow v \notin v)$ – Аксиома?

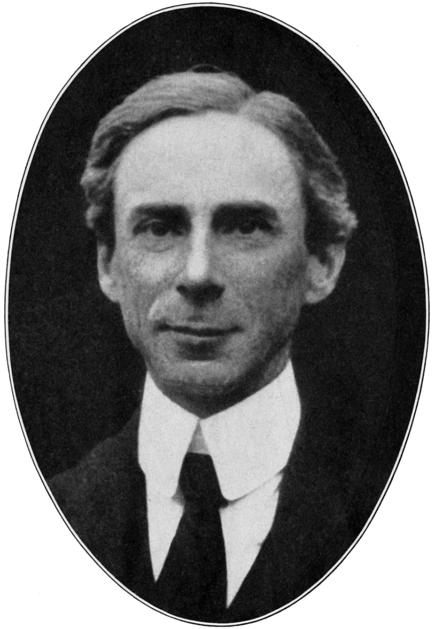
$s = \{\, v \mid v \notin v \,\}$

$s \in s \leftrightarrow s \notin s$ – *такого множества не существует*

Парадокс Рассела

Формула $x \notin x$

не задает никакого множества.



Бéртран Áртур Уи́льям Рáссел
*Bertrand Arthur William Russell,*
3rd Earl Russell
1872—1970

# Разрешение парадокса в теории множеств Цермело – Френкеля

**Идея:** Строить множество из уже построенных, тогда оно будет существовать.

Начинаем, как Кантор

**Аксиому объемности** сохраняем

**Существует пустое множество.**

$\exists u\, \forall v(v \notin u)$

**Существует множество, которое содержит пустое и всякий его элемент получаются из другого его элемента *w* как *w* ∪ {*w*}**

$\exists s(\exists u(u \in s \land \forall v(v \notin u))\land$

$\land\forall u(u \in s \to \exists v(v \in s \land \forall w(w \in v \leftrightarrow (w \in u \lor w = u)))))$

Мы так строили натуральный ряд:

$0 = \emptyset = \{\ \},\ \ 1 = \{\emptyset\},\ \ 2 = \{0,1\},\ \ 3 = \{0, 1, 2\},$

Эрнст Фри́дрих Фердина́нд Це́рмело
*Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo*
1871—1953

Сформулировал Аксиому выбора и доказал возможность полного упорядочения

Абраха́м Галеви́ (Адо́льф) Фре́нкель
*Abraham Halevi (Adolf) Fraenkel*
1891—1965

# Аксиомы теории множеств Цермело – Френкеля

Для всякого множества *u* все его подмножества *v* образуют множество *s*

$$\forall u\ \exists s\ \forall v\ (\forall w\ (w \in v \to w \in u) \leftrightarrow v \in s)$$

# Аксиомы теории множеств Цермело – Френкеля

**Существование (образование) множеств.**

Для любого множества $u$, его элементы $v$, определяемые каким-то свойством Ф, тоже образуют множество – $s$.

$\forall \boldsymbol{t}\ \forall u\ \exists s\ \forall v\ (v \in s \leftrightarrow (v \in u \land \Phi(\boldsymbol{t}, v)))$,

здесь $\boldsymbol{t}$ – это цепочка (вектор) параметров.

# Аксиомы теории множеств Цермело – Френкеля

Пусть для всякого $u$ формула $\Phi(u,w)$ задает множество $v$ элементов $w$. Тогда можно из всякого множества $z$ образовать множество $s$, *состоящее из тех элементов* $w$, *которые находятся* в отношении $\Phi(u,w)$ с каким-то $u$ из $z$ .

*(самая запутанная аксиома)*

$$\forall u\ \exists v\ \forall w\ (w \in v \leftrightarrow \Phi(u, w)) \rightarrow$$
$$\rightarrow \forall z\ \exists s \forall w\ (w \in s \leftrightarrow \exists u\ (\Phi(u,w) \wedge u \in z\ ))$$

# Аксиомы теории множеств Цермело – Френкеля

Пусть для всякого $u$ формула $\Phi(u,w)$ задает множество $v$ элементов $w$.

Тогда можно из всякого множества $z$ образовать множество $s$, состоящее из всех $w$, находящиеся в отношении $\Phi(u,w)$ с каким-то $u$ из $z$.

$$\forall u\, \exists v\, \forall w\, (w \in v \leftrightarrow \Phi(u, w)) \rightarrow$$
$$\rightarrow \forall z\, \exists s \forall w\, (w \in s \leftrightarrow \exists u\, (u \in z \wedge \Phi(u,w)))$$

Можно добавить параметры: $\Phi(\boldsymbol{t}, x, y)$ и выписать соответствующую формулу.

**У.** Как доказать существование объединения множеств некоторого семейства (множества) множеств?

$\Phi(u,w)$ – это $w \in u$ ; $z$- это семейство; его элементы – множества $u$

# Аксиомы теории множеств Цермело – Френкеля

Не бывает бесконечных цепочек

$$\dots \in a_n \in a_{n-1} \in \dots \in a_2 \in a_1$$

**Аксиома регулярности (фундирования)**

$$\forall u\, (\exists v\, (v \in u) \to \exists v\, (v \in u \land \neg \exists w\, (w \in v \land w \in u)))$$

# Аксиомы теории множеств Цермело – Френкеля

**Аксиома выбора AC** (эквивалентная формулировка)

Для любого множества $u$, состоящего
из непустых попарно не пересекающихся множеств $x$,
существует множество $y$, имеющее ровно один общий элемент
с каждым $x \in u$.

Расширенная таким образом система аксиом обозначается **ZFC**.

# Теория множеств Цермело – Френкеля

Построение исчисления – способа получения теорем.

Формализация математических рассуждений.

Будет описано исчисление (см. Лекцию про исчисления)

Исчисление отношений пригодно не только для теории множеств, но и для различных структур

# Выводимость

**О.** (индуктивное). Формула *выводима в исчислении отношений*, если:

- Это аксиома

или

- Получается из выводимой по правилу вывода

В дальнейшем мы рассмотрим более общее определение исчисления.

# Исчисление отношений

Произвольная сигнатура из имен объектов и имен отношений.

Было: исчисление формул логики отношений. Добавляется новый класс: ***теоремы***

Как строятся выводы (доказательства)?

***Логические аксиомы - теоремы, правила вывода – получения новых теорем***

**Аксиомы**:

- Подстановки любых формул в **истины** (общезначимые формулы, тавтологии) **логики высказываний**,
- формулы вида $(\forall \boldsymbol{x}\, \Phi) \to \Phi[\boldsymbol{t}/\boldsymbol{x}]$,
- формулы вида $\Phi[\boldsymbol{t}/\boldsymbol{x}] \to (\exists \boldsymbol{x}\, \Phi)$,

где $\Phi$ – формула, $x$ - переменная, $t$ – переменная или имя объекта

$\Phi[t/x]$ – результат подстановки $t$ вместо всех свободных вхождений $x$ в $\Phi$.

# Исчисление отношений

**Правила вывода - порождения (из над-чертой порождается под-чертой):**

$$\frac{\Phi, \quad \Phi \to \Psi}{\Psi}$$

$$\frac{\Phi \to \Psi}{\Phi \to (\forall\, u\, \Psi\, [u/x])}$$

$$\frac{\Psi \to \Phi}{(\exists\, u\, \Psi[u/x]) \to \Phi}$$

*u, x* – переменные, *x* не входит свободно в $\Phi$ во втором и третьем правиле.

# Математика

**О.** Высказывание является *математической теоремой*, если оно выводимо из аксиом теории множеств + исчисление отношений

# Что сделал Лобачевский?

«Пятый постулат»:

***через точку, не лежащую на заданной прямой, нельзя провести более одной прямой, параллельной этой заданной прямой*.**

Буквально: Перевод «Начал» 1948 г.: И если прямая, падающая на [пересекающая] две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, [в сумме] меньшие двух прямых [углов], то продолженные неограниченно эти прямые встретятся с той стороны, где [в сумме] углы меньше двух прямых [углов]

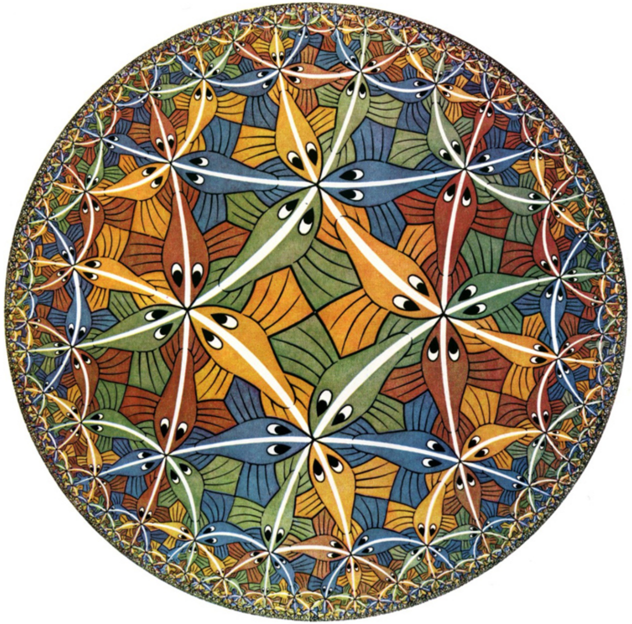
Лобачевский: Получил разнообразные следствия из аксиом Евклида с заменой пятого постулата на существование нескольких прямых, проходящих через одну точку и не пересекающих данную. Поверил, что так может быть

Янош Бойяи также построил «Неевклидову геометрию».

Карл Фридрих Гаусс утверждал, что он ее построил на десятилетия раньше, но признавал важность построений Лобачевского и Бойяи

Геометрия Евклида (без Пятого постулата) – не полна. (Что такое полнота?)

# Модель Пуанкаре и теория относительности



В соответствии с теорией относительности реальный мир – не Евклидов

# Может ли геометрия быть противоречивой?

**У.** Если теория противоречива, в ней можно доказать все, что угодно

Непротиворечивость:

- Евклидова геометрия, строим модель
- теория действительных чисел,
- теория множеств.

Противоречива ли теория множеств?

Парадокс Рассела: если допустить существование множеств, задаваемых произвольными формулами, получаем противоречие.

# Программа Гильберта

Крупнейший математик мира Давид Гильберт:

- Завершить построение математики, как формальной **системы**:
    - **Непротиворечивой**
    - **Полной**: любое высказывание – может быть в системе доказано или опровергнуто

Эти **свойства** системы могут быть **доказаны**:

- **Свойства**: утверждения о простых объектах: конечных цепочках символов: формулах и доказательствах (в теории множеств ZF+… )
- **Доказательства**: в надежной, простой и интуитивно убедительной системе

23.01.1862 – 14.02.1943

# Речь Гильберта

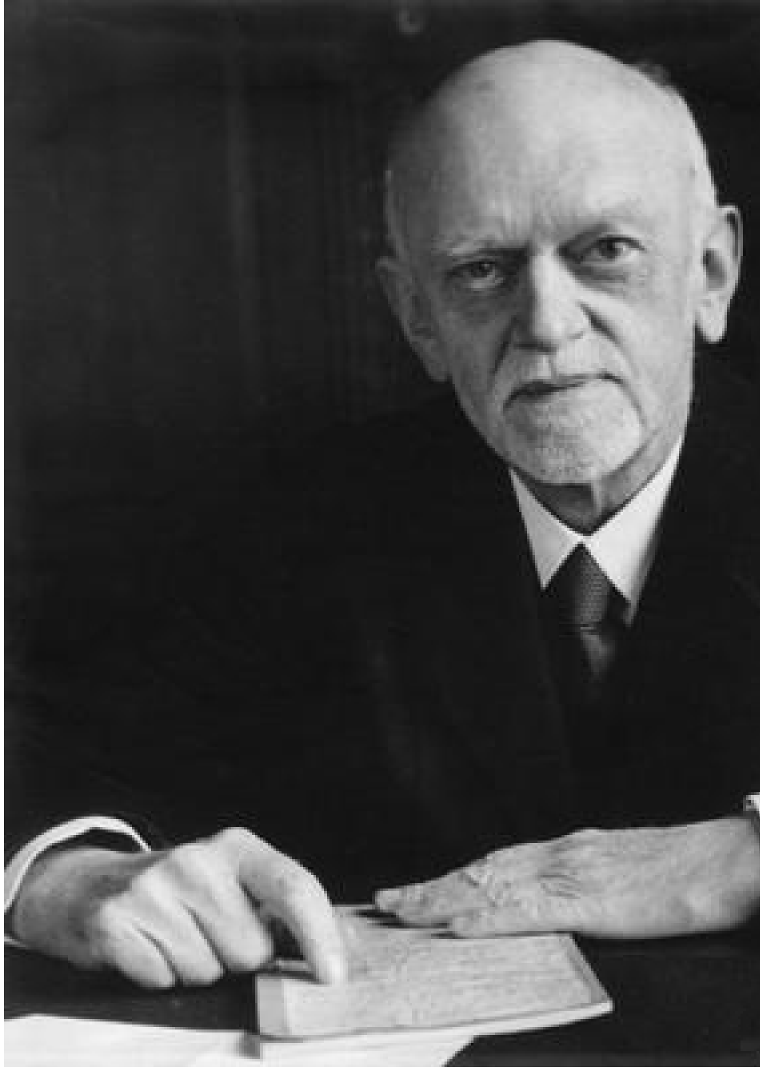
## Понедельник 8 сентября 1930 гг. – Кёнигсберг

Не верьте тем, кто сегодня философствуют и предсказывают падение культуры и неизбежность непознаваемого (ignorabimus).

Для нас, как и во всем естествознании не существует непознаваемого. Нашим девизом должно быть:

**Мы должны знать - мы будем знать!**

**Wir müssen wissen, Wir werden wissen.**



## Парадокс Лжеца

***Написанное здесь высказывание – Ложно.***

# Истинность

Можно ли определить истинность?

Истинность высказываний о данной структуре мы определяли в (интуитивной) теории множеств.

Можно ли истинность высказываний о структуре определить в самой структуре (или в более простой)?

Как говорить в языке о формулах языка?

Программа Гильберта предлагает рассмотреть структуру, в которой можно естественно определять свойства формул. Фиксируем некоторую такую структуру. (Гильберт говорил об арифметике сложения и умножения

Будем говорить о **кодах** формул – цепочках в алфавите 0,1 (например) – элементах структуры – **Код**(**Ф**).

Формулы с одной свободной переменной (например) *x* – ***одноместные*** **формулы**

Операция **Подст** (*a, b*) дает код формулы, получающейся подстановкой цепочки *a* в одноместную формулу с кодом *b*. То есть, для любой формулы Г:

**Подст** (*a,* **код** Г) = **код** Г(*a*)

**Подст**, конечно, определимо в нашей структуре.

**Пусть существует Ф – одноместная формула, определяющая истинность в структуре.**

# Неопределимость истины

**Пусть существует Ф – одноместная формула, определяющая истинность в (нашей) структуре.**

Попробуем построить одноместную формулу Г, утверждающую ложность подстановки кода некоторой одноместной формулы в нее саму.

Заметим, что для любой одноместной Г: **Подст** (**код** Г, **код** Г) = **код** Г(**код** Г) (1)

Ф (**Код** Г(*b*) ) ⇔ Г(*b*) по определению Ф (2)

Положим теперь Г = ¬ Ф (**Подст**(*x*,*x*)) (3)

Г(**код** Г) $\overset{\textbf{(3)}}{=}$ ¬ Ф (**Подст** (**код** Г, **код** Г)) $\overset{\textbf{(1)}}{=}$ ¬ Ф (**код** Г(**код** Г) ) $\overset{\textbf{(2)}}{\Leftrightarrow}$ ¬ Г(код Г)

**Теорема Геделя – Тарского. Истинность для структуры неопределима в самой структуре.**

# Неполнота доказуемости

Для любой системы доказательств в нашей структуре есть формула Ф, определяющая множество доказуемых высказываний. Оправданная надежда Гильберта.

Мы только что доказали, что никакая формула Ф не может определять множество истинных формул.

**Доказуемость отличается от истинности.**

Это – **Теорема Геделя о неполноте**. (Одна из формулировок)

**Реализовать Программу Гильберта невозможно.**

При этом принято считать, что большая часть теорем математики состоит из высказываний, доказуемых в ZFC

# История. Драма идей

**8 сентября** – Съезд немецких ученых и врачей *Gesellschaft der Deutschen Naturforscher und Ärzte)*.

Открытие и речь Гильберта «Логика и познание природы»; сокращенный вариант речи по Немецкому радио.

**5-7 сентября** International Conference on the Epistemology of the Exact Sciences (Königsberg) – несколько десятков ведущих ученых

**5 сентября**

Доклад Дж. Фон Неймана о Программе Гильберта (60 мин.)

Доклад К. Геделя с теоремой о полноте (у нас – построение модели) (20 мин.)

**7 сентября** заключительный круглый стол. Замечание Геделя с теоремой о неполноте.

- Не замечено никем, кроме фон Неймана

## Вторая теорема Геделя

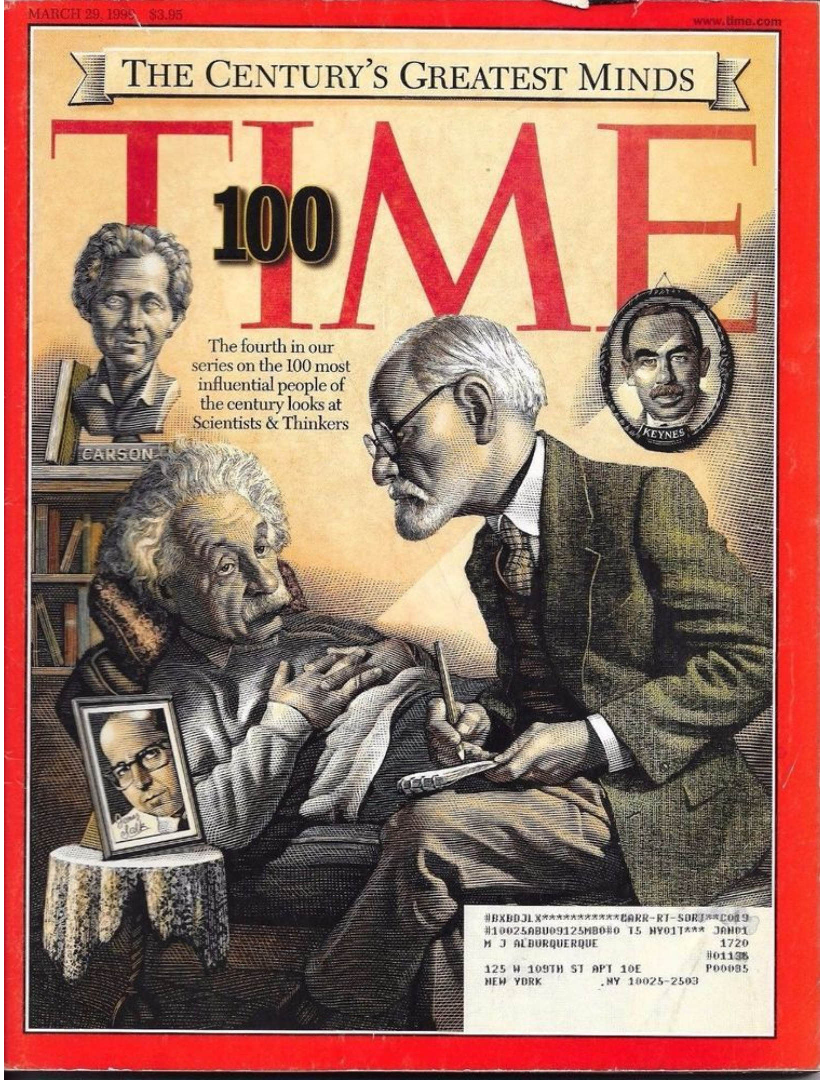
В системах, в которых предполагалось доказательство нужных свойств математики, невозможно доказать непротиворечивость математики (и даже – их самих).

Конечно, эти системы могли сами оказаться противоречивыми…

# Теоремы Геделя

**Пропасть между доказуемостью и истинностью, между математикой и реальностью.**

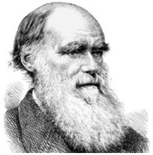
Time (20): Гедель (math), Тьюринг (comp. sci), Витгенштейн (philos)



# Революции мировоззрения

## Отказ от представлений:

Человек – Центр Вселенной



Человек – Венец Творения (эволюции)

Человек может открыть всю истину о Мире

Разум человека самостоятелен

Интеллект возможен только в мозге Человека

Всемирный день логики 14 января. Смерть Геделя, рождение Тарского, комбинация дат Гильберта

Даты жизни Гильберта 23.01.1862 – 14.02.1943

# Независимость в теории множеств

Среди высказываний теории множеств, есть важные *независимые:* добавление такого высказывания, и добавление его отрицания не приводят к противоречию.

«Результат Лобачевского» – нет «на самом деле»

**Аксиома выбора**

**Континуум-гипотеза**: всякое не счетное подмножество множества действительных чисел ему изоморфно.

1938 г.

- Гедель – континуум-гипотеза и аксиома выбора не опровержимы в ZF

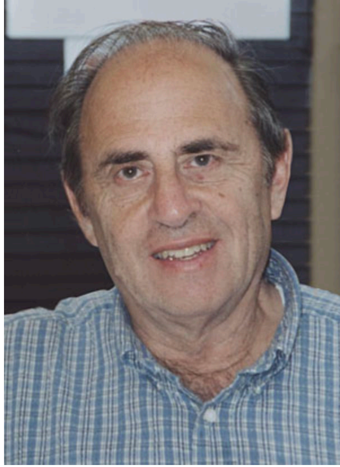
1960-е гг.

- Пол КоэнКонтинуум-гипотеза и Аксиома  выбора не доказуемы в ZF.

Альтернативные основания математики

- Петр Вопенка, Владимир Воеводский

**Пол Джóзеф Кóэн**
*Paul Joseph Cohen*
1934—2007



**Петр Вóпенка**
*Petr Vopěnka*
1935—2015

**Владимир Воеводский**
1966 – 2017

# Лекция 13

## Было:

- Задача аксиоматического построения математики
- Аксиомы Кантора. Парадокс Рассела
- Аксиомы теории множеств Цермело – Френкеля
- Исчисление отношений
- Неопределимость истины
- Различие истинности и доказуемости
- Независимость в теории множеств