Лекции по математической логике и теории алгоритмов
А. Л. Семенов, 2023
Лекция 10

1 Решётка определимости. Автоморфизмы

Определение 1. Пусть задан универсум U, множество S отношений на U и объектов из U.
Возьмем в S произвольное конечное подмножество. Дадим его элементам имена. Напишем любую формулу логики отношений. Ее значение — некоторое отношение R на U.
Мы говорим, что отношение R *определимо* через S.

Заметим, что объем определяемого нами понятия не изменится, если сразу дать имена всем элементам S.

Определение 2. *Замыкание* S — все, что определимо через S. *Замкнутое множество* — совпадающее со своим замыканием.
Замкнутые множества мы называем также *пространствами определимости*.

Определение 3. (напоминание) *Частичный порядок* — двухместное рефлексивное, транзитивное, антисимметричное отношение $\leqslant$. Структура, состоящая из множества и заданного на нем частичного порядка, называется *частично упорядоченным множеством (чум)*.

Задача 1. Запишите условия рефлексивности, транзитивности, антисимметричности отношения.

Подсказка. Попробуйте вспомнить, с учетом интуитивного смысла терминов, если не получится, посмотрите лекцию 1.

Решение. $\forall u\ (u \leqslant u)$ — *рефлексивность*,

$\forall u, v, w\ (u \leqslant v \wedge v \leqslant w \to u \leqslant w)$ — *транзитивность*,

$\forall u, v\ (u \leqslant v \wedge v \leqslant u \to u = v)$ — *антисимметричность*

Конечно, рефлексивность и антисимметричность естественно объединить в одно условие (подумайте, как?).

Задача 2. Дайте определения *точной верхней грани* (твг, sup) и *точной нижней грани* (тнг, inf) двух элементов чум.

Подсказка. Вспомните определения из математического анализа, относящиеся к действительным числам.

Решение.

Определение 4. *Верхняя грань* двух элементов чум – это элемент, который больше или равен каждому из них; *твг* двух элементов – это такая их верхняя грань, которая меньше или равна любой их верхней грани.
Нижняя грань двух элементов чум – это элемент, который меньше или равен каждому из них; *тнг* двух элементов – это такая их нижняя грань, которая больше или равна любой их нижней грани.
■

Определение 5. *Решетка* – это частично упорядоченное множество, где у любых двух элементов есть точная верхняя и точная нижняя грани.

Задача 3. Докажите, что следующие структуры являются решетками:

1. множество всех подмножеств данного множества, упорядоченное по включению; что будет твг и тнг?

2. всякое линейно упорядоченное множество; что будет твг и тнг?

3. множество всех подпространств векторного пространства, упорядоченных по включению, что будет твг и тнг?

4. множество положительных целых чисел, упорядоченных по делимости; что будет твг и тнг?

5. множество подгрупп данной группы; что будет твг и тнг?

6. множество подпространств данного пространства определимости, упорядоченных по включению; что будет твг и тнг?

Подсказка. Утверждения непосредственно следуют из определений.

Решение. 1. объединение и пересечение множеств;

2. наибольший и наименьший из элементов;

3. сумма и пересечение подпространств;

4. НОК и НОД;

5. подгруппа, порожденная подгруппами и пересечение подгрупп;

6. замыкание объединения подпространств, пересечение подпространств.

Последняя из решеток — образованная пространствами определимости, является предметом изучения теории определимости и называется *решеткой определимости*.
Общее определение решетки и примеры здесь мне кажутся лишними. Костюков изучал определимость, не владея этой терминологией, и это ему не мешало.

Определение 6. Пусть задан универсум U.
Перестановкой универсума называется любое взаимно однозначное отображение U на себя.
Заметим, что всякая перестановка ϕ универсума U задает также перестановку всех контекстов над U: перестановка контекста действует как ϕ на каждом компоненте контекста.
Группа всех перестановок множества U обозначается $\mathrm{Sym}(U)$.

Следующее понятие нам уже встречалось.

Определение 7. Пусть на U задано множество отношений S.
Перестановка U, сохраняющая отношения из S, называется *автоморфизмом* S. Все автоморфизмы S образуют группу, называемую *группой автоморфизмов* этого множества отношений — $Aut(S)$.

Задача 4. Если перестановка универсума сохраняет множество отношений, то она сохраняет все отношения, определимые через это множество.

Подсказка. Мы уже доказывали и использовали это в частном случае. При естественной точке зрения утверждение очевидно. Естественно действовать индукцией по построению формулы.

Решение. Итак, у нас фиксирована структура и перестановка на ее универсуме и, значит, на множестве контекстов.
Будем доказывать требуемое утверждение индукцией по построению формулы, определяющей отношение.
Для атомных формул сохранение значения непосредственно вытекает из условия. Для логических связок утверждение очевидно. Для кванторов надо только обратить внимание, что образы, при рассматриваемой перестановке, элементов универсума покрывают весь универсум, то же верно для прообразов. Последнее означает, что существование в образе значения переменной из контекста, удовлетворяющего формуле, эквивалентно существованию такого значения в прообразе.

Определение 8. Пусть в группе перестановок множества A задана подгруппа G и выполнено следующее свойство. Для любой перестановки g множества A из того, что для любого конечного подмножества F в A найдется перестановка $f \in G$ совпадающая с g на F, вытекает $g \in G$.
Тогда G называется *замкнутой*.

(Обратите внимание, что здесь слово «замкнутый» имеет иной смысл, чем выше, при определении пространства. В данном случае, это слово связано с топологией, попробуйте проследить связь с теоремой компактности для топологических пространств.)

Задача 5. Докажите, что группа автоморфизмов любого множества отношений — замкнута.

Подсказка. Что значит, что перестановка НЕ сохраняет множество отношений?

Решение. Рассмотрим перестановку, которая не сохраняет множество отношений. Это значит, что она не сохраняет какое-то отношение из этого множества. В свою очередь, это значит, что она не сохраняет значение этого отношения на каком-то наборе аргументов. Этот набор – конечен. Значит перестановка не лежит в замкнутой подгруппе. Слишком кратко. Стоит добавить: «Поэтому не может существовать перестановки из группы автоморфизмов, совпадающей с этой на этом конечном множестве.»

Определение 9. Пусть дано произвольное множество перестановок T. Отношение называется *инвариантом* этого множества, если оно сохраняется под действием любого элемента из T.

Задача 6. Пусть для множеств перестановок G, H выполнено $G \subseteq H$. Что можно сказать о соответствующих множествах инвариантов?

Подсказка. Используйте определение.

Решение. Если какое-то отношение сохраняется при всех перестановках из H, то оно сохраняется при всех перестановках из G, поэтому множество инвариантов для H содержится в множестве инвариантов для G.

Задача 7. Пусть для множеств отношений S, P выполнено $S \subseteq P$. Что можно сказать о соответствующих группах автоморфизмов?

Подсказка. Используйте определение.

Решение. Увеличение требований к объектам (в данном случае автоморфизмам) приводит к не расширению множества объектов, этим требованиям удовлетворяющих.

Аналогично понятию подгруппы, можно определить понятие *надгруппы.*

Определение 10. Пусть дана произвольная группа T перестановок некоторого множества. Группа перестановок того же множества называется надгруппой T, если она содержит T.

Задача 8. Пусть задано пространство определимости S. Тогда два отображения:

- отображение, ставящее в соответствие каждому подпространству в S его группу автоморфизмов $Aut(S)$ и

- отображение, ставящее в соответствие каждой замкнутой надгруппе G группы $\mathrm{Aut}(S)$ пространство инвариантов этой надгруппы $Inv(G)$

образуют соответствие Галуа.

Подсказка. Соответствие Галуа нам уже встречалось, как соответствие между теориями и классами моделей. Если его переписать как соответствие между пространствами определимости и замкнутыми группами, получится вот что:

- Отображения Aut, Inv — (нестрого) монотонно убывающие (другими словами — антимонотонные).
- $G \subseteq Aut(S) \iff S \subseteq Inv(G)$;
- $S \subseteq Inv(Aut(S))$;
- $G \subseteq Aut(Inv(G))$.

Решение. Требования определения проверяются непосредственно, как в предшествующих задачах.

Итак, со всякой структурой связано ее *пространство определимости* — это все отношения, определимые через отношения и объекты, являющиеся значениями элементов сигнатуры. Соответственно определяется *решетка определимости* данной структуры.

Возьмем в качестве универсума рациональные числа, а в качестве пространства отношений — все отношения, определимые через порядок рациональных чисел. Я бы начал изложение с этого примера, а все разговоры про «пространства определимости» и «соответствие Галуа» удалил. Но Вам, конечно, виднее.

Задача 9. Какова группа автоморфизмов порядка рациональных чисел? Будет ли любой автоморфизм непрерывным?

Подсказка. Попробуйте нарисовать график автоморфизма.

Решение. Автоморфизмы — это строго возрастающие отображения.
Пусть дана окрестность значения отображения в точке x. Возьмем в ней два рациональных числа — одно меньше, другое больше этого значения. Интервал между прообразами этих двух чисел — это окрестность точки x. Ее образ лежит целиком в исходной окрестности. Конечно, мы несколько раз использовали монотонность и взаимнооднозначность отображения.

Задача 10. Можно ли через отношение порядка на рациональных числах определить отношение «быть числом 0»?

Подсказка. Автоморфизмы должны сохранять все определимое, все инварианты.

Решение. Рассмотрим отображение, добавляющее к каждому числу единицу. Это, очевидно, автоморфизм порядка, не сохраняющий ноль. Противоречие.

Содержательно понимаемое отношение «между» определимо через отношение порядка в любом линейно упорядоченном и даже — частично упорядоченном множестве.

Задача 11. Напишите формулу, определяющую отношение $B(x, y, z)$: x «между» y и z через отношение порядка.

Подсказка. Что может значить «между»?

Решение. $B(x, y, z) \rightleftharpoons (y < x \wedge x < z) \vee (z < x \wedge x < y)$

Задача 12. Определимо ли отношение порядка на рациональных числах через отношение «между»?

Подсказка. Попробуйте придумать автоморфизм отношения «между», который не сохраняет отношение порядка на рациональных числах.

Решение. Возьмем какой-то автоморфизм отношения между, не сохраняющий порядок, например смену знака. Это и дает решение задачи.

Задача 13. Определимо ли отношение следования на целых числах: $x + 1 = y$ через отношение прибавления двойки?

Подсказка. Надо придумать автоморфизм. Он может действовать по-разному на четных и нечетных числах.

Решение. Определим отображение: оно оставляет на месте четные числа, а к нечетным добавляет двойку (или четверку, все равно). Тогда оно сохраняет отношение прибавления двойки, но не отношение прибавления единицы.

Из этих простых примеров можно сделать следующие простые выводы:

- доказать определимость одного отношения через другое (или другие) можно, предъявив требуемую логическую формулу; доказать неопределимость — сложнее;
- доказать неопределимость отношения можно, найдя автоморфизм пространства определимости, не сохраняющий это отношение.

Можно было бы надеяться, что не определимость какого-то отношения через другие ВСЕГДА можно доказать, подобрав подходящий автоморфизм. Однако простые примеры подсказывают, что это не так: бывает, например, что автоморфизмов нет вовсе (кроме тривиального), а определимость через какое-то множество отношений удается

описать, и ясно, что данное отношение этому описанию не соответствует, но с помощью автоморфизмов этого не докажешь.
Однако все не так плохо. Мы не зря занимались базовыми понятиями теории моделей. Можно воспользоваться следующими обстоятельствами:

- если две структуры эквивалентны (в частности, если одна есть расширение другой) лучше сказать «например, если одна есть *элементарное* расширение другой), то определимость в одной из них влечет определимость в другой.
- группы автоморфизмов эквивалентных структур могут различаться.

Задача 14. Определимо ли отношение следования на натуральных числах: $x + 1 = y$ через отношение соседства: «расстояние между числами равно единице»?

Подсказка. У отношения соседства на натуральных числах нет изоморфизмов. Действительно, у нуля нет соседей, значит, ноль переходит в ноль; единственный сосед нуля, это единица, значит, единица переходит в единицу и т.д.
Рассмотрите расширение структуры следования натуральных чисел аналогично тому, как это делалось в доказательстве не ω-категоричности и полноты теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$, описывающей порядок натуральных. Добавьте «после натуральных одну галактику целых».
У структуры $\mathbb{N}+\mathbb{Z}$ с отношением соседства автоморфизмы есть, например – отражение (смена знака) у элементов второго слагаемого. Ясно, что указанная сейчас перестановка не сохраняет отношение $+1$.

Решение. На прошлой лекции опять лекции. Пройдитесь поиском по всему тексту и удалите «лекции» мы доказали полноту теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$. Эта теория имела сигнатуру $\{<\}$, а не $+1$ Нетрудно проверить, что $\Gamma_{\mathbb{N}}$ выполнена в структуре $\langle \mathbb{N}+\mathbb{Z}; +1\rangle$.
В силу полноты $\Gamma_{\mathbb{N}}$ структуры $\langle \mathbb{N}; +1\rangle$ – и $\langle \mathbb{N}+\mathbb{Z}; +1\rangle$ – элементарно эквивалентны. Необходимо пояснение, что из эквивалентности в богатом языке следует эквивалентность и в бедном.
Рассмотрим формулу, означающую, что для всех значений аргументов прибавление единицы эквивалентно некоторой формуле, содержащей только соседство. Здесь как будто содержится квантор по «некоторой формуле». Лучше написать так: Допустим существует формула, содержащая только соседство и выражающая прибавление единице. Напишем формулу, означающую, что для всех значений аргументов эта формула эквивалентна добавлению единицы. Эта формула не может быть истинной в ... Но такая формула не может быть истинной в $\langle \mathbb{N}+\mathbb{Z}; +1\rangle$, поскольку одна из частей эквивалентности, истинная на паре элементов из компоненты $\mathbb{Z}$, становится ложной при некотором автоморфизме $\mathbb{N}+\mathbb{Z}$ с отношением соседства а другая часть остается истинной.
Противоречие.
Утверждение доказано.

Возникает надежда на доказательство неопределимости путем подбора расширения исходной структуры и некоторого автоморфизма этого расширения. Оказывается, что этой надежде суждено сбыться, как показал Ларс Свенониус в 1959 году. Доказательство это важной теоремы мы не будем обсуждать на лекциях, оно не входит в экзаменационный материал. Но оно имеется в конспекте курса (размещенном в интернете, там это – следующая лекция) и его можно обсуждать с преподавателями.

Теорема Свенониуса.
Пусть $M = \langle A, \Sigma \rangle$ —- счетная структура, $\Sigma' \subset \Sigma$, $P \in \Sigma$.
Следующие два условия эквивалентны:
(i) P не определимо в $\langle A, \Sigma' \rangle$,
(ii) существует счетное элементарное расширение $M' = \langle A', \Sigma \rangle$
структуры M и автоморфизм структуры $\langle A', \Sigma' \rangle$, не сохраняющий P.
В формулировке этой теоремы оптимальный баланс между количеством формул и текста (IMHO)
Теорема Свенониуса говорит, что при доказательстве не определимости для разных отношений могут потребоваться разные расширения.
Ситуация существенно упрощается, если среди таких расширений есть наибольшее.

Определение 11. Структура называется *полной вверх*, если у нее нет элементарных расширений (то есть всякое ее элементарное расширение ей изоморфно).

Определение 12. *Пополнение вверх* структуры – это полное вверх ее расширение.

Определение 13. *Антиизоморфизмом решеток* называется взаимнооднозначное соответствие между их универсумами, при котором отношение $\leqslant$ переходит в $\geqslant$.

Задача 15. Докажите, что для всякой пополнимой вверх структуры ее решетка определимости антиизоморфна некоторой решетке замкнутых надгрупп группы автоморфизмов ее пополнения вверх. Тут лучше уточнить, какого именно пополнения, потому что их может быть много. Кроме того, лучше сформулировать сначала задачу для полных вверх структур.

Подсказка. Утверждение задачи является комбинацией определений, доказанных ранее утверждений и теоремы Свенониуса.

Решение. Решетки всех элементарно эквивалентных структур изоморфны. Поэтому утверждение достаточно доказывать для полных вверх структур.
По теореме Свенониуса, если какое-то отношение не лежит в каком-то подпространстве определимости структуры, то существует автоморфизм подпространства, для которого это отношение – не инвариант.
Значит, отображение, ставящее в соответствии каждому подпространству его группу автоморфизмов – инъективно.

Задача 16. (Дополнительная)

Построить решетки определимости для структур

- $\mathbb{Q}$ Надо уточнить, что речь идет об упорядоченном множестве
- $\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$

Подсказка. Попытаться найти как можно больше разных подпространств в этих структурах и группы автоморфизмов для этих пространств.

Задача 17. (Открытая проблема) Построить решетки определимости для структур

- $\langle \mathbb{N}; +1 \rangle$
- Множество пар целых чисел с операциями добавления 1 к каждой из компонент.

Подсказка. Попытаться найти как можно больше разных подпространств в этих структурах и группы автоморфизмов для этих пространств.

1.1 Дополнительный материал. Теорема Свенониуса

В качестве примера общего утверждения об определимости докажем следующую лемму, которая понадобится нам в доказательстве теоремы Свенониуса.

Задача 18. Лемма об определимости кусочно постоянного отношения.
Пусть на некотором множестве U задано конечное множество F одноместных отношений и одноместное отношение R. Будем считать два объекта эквивалентными, если значения всех отношений из F на них совпадают. Пусть R постоянно на любом классе эквивалентности. Тогда R определимо через F.

Комментарий. Название леммы связано со следующим ее содержательным смыслом. Пусть задано некоторое одноместное отношение, а другое одноместное отношение постоянно на тех областях, где постоянно первое (кусочно постоянно). Тогда, очевидно, это другое отношение или совпадает с первым, или является его отрицанием, то есть — определимо через него. Еще возможен случай, когда другое отношение постоянно. Утверждение леммы является прямым обобщением сформулированного утверждения на случай конечного числа одноместных отношений, при этом "куском"оказывается область, где все эти отношения постоянны.

Подсказка. Сколько может быть классов эквивалентности?
Как записать формулу, задающую один класс эквивалентности?
Как записать формулу, означающую истинность R в точности на этом одном классе?
Как записать искомую формулу для R?

Решение. Назовем "куском"каждый класс эквивалентности по всем одноместным отношениям из F. Ясно, что количество кусков конечно — оно не превосходит 2^k, где k — число элементов в F.
По условию теоремы, на каждом куске R — постоянно. Отберем те куски, на которых отношение R — истинно. Формула, истинная в точности на одном куске, есть конъюнкция некоторых отношений из F и отрицаний остальных. Дизъюнкция этих формул — определяет R.
Лемма доказана. Нетрудно заметить, что доказательство фактически копирует построение ДНФ.

Очевидным следствием леммы является то же самое утверждение, где мы заменим объекты на n-мерные векторы, а одноместные отношения — на n-местные, при фиксированном n. Это следствие получится, если в качестве универсума использовать n-ую прямую степень универсума исходной структуры, тогда n-местные отношения станут одноместными и т.д.
Именно в такой форме мы будем ее использовать.

Задача 19. Теорема Свенониуса.
Пусть $M = \langle A, \Sigma \cup \{R\} \rangle$ – счетная структура. Следующие два условия эквивалентны:
(i) R не определимо в $\langle A, \Sigma \rangle$,
(ii) существует счетное элементарное расширение
$M' = \langle A', \Sigma \cup \{R\} \rangle$ структуры M и автоморфизм $\langle A', \Sigma \rangle$, не сохраняющий R.

Комментарий Итак, мы собираемся доказать теорему Свенониуса, состоящую в возможности доказать неопределимость отношения R в некоторой структуре путем построения расширения этой структуры и автоморфизма этого расширения, для которого отношения структуры — инварианты, а R — не инвариант.
Теорема Свенониуса является, в некотором смысле "теоремой полноты"для теории определимости, она показывает, что метод автоморфизмов универсален. Расширяя структуру, добавляя в нее, как это делается в геометрии «идеальные элементы», мы получаем структуру, более богатую автоморфизмами, где неопределимое отношение – уже не инвариант.

Подсказка. Сначала добьемся нарушения нашего отношения при некотором "конечном частичном автоморфизме".
Будем счетное число раз выбирать формулу и достраивать универсум и "частичный автоморфизм"так, чтобы отношения, выраженное всеми уже выбранными формулами сохранялись при этом автоморфизме, а наше отношение продолжало нарушаться.
Потом "перейдем к пределу".

Решение. Начнем с общего утверждения, относящегося к последовательностям элементарных расширений.

Задача 20. Лемма Тарского о транзитивности элементарных расширений
Пусть дана конечная или счетная последовательность структур, где каждая последующая является элементарным расширением предыдущей. Тогда объединение этих структур будет элементарным расширением каждой из них.

Подсказка. Естественно в том или ином виде использовать аргумент компактности: всякая формула, как и всякое имя, появились на каком-то конечном шаге. Для конечных шагов надо установить транзитивность расширения. Некоторая трудность возникает, конечно, именно "на бесконечности". Попробуйте доказывать утверждение индукцией по построению формулы.

Решение. Итак, будем доказывать утверждение индукцией по построению формулы из определения элементарного расширения. Обратим внимание, что там речь идет о любой формуле, эта формула становится «высказыванием», когда мы подставляем в нее элементы структур (точнее, их имена).
Для конечных цепочек утверждение очевидно.

Рассмотрим бесконечный случай.

Для атомных формул утверждение тривиально. Для дизъюнкции и отрицания – тоже. Остается случай существования: формула $\exists y \Phi(x, y)$, причем для формулы $\Phi(x, y)$ требуемая эквивалентность доказана.

Пусть в качестве значения для переменных x выбраны a, тогда эти a появились в каком-то расширении на конечном шаге (стандартный ход в рассуждениях типа компактности и др.).

Обозначим через D_1 универсум первой структуры, через D универсум бесконечного объединения.

Если b, для которого выполнено $\Phi(a, b)$, найдется в универсуме D_1, то b уже лежит в D. Если b найдется в D, то оно оказалась там на каком-то конечном шаге. На этом шаге была построена некоторая структура; для $\Phi(x, y)$ по индуктивному предположению требуемая эквивалентность между значениями $\Phi(a, b)$ была выполнена для этой структуры и бесконечного объединения. В то же время, эта структура является элементарным расширением всех предшествующих, поэтому b найдется уже там.

Лемма доказана.

Возвращаемся к доказательству теоремы Свенониуса. Имея структуру M и отношение R, не определимое в ней, мы построим расширение структуры M и автоморфизм этого расширения, для которого R — не инвариант.

В ряде случаев (и, в частности, в данном доказательстве) полезно ассоциировать со структурой M некоторое ее «обогащение», M^*, сигнатура этой теории получается из исходной сигнатуры добавлением имен для всех элементов носителя M.

Например, в случае $M = \langle Q, \{<\} \rangle$, теория $Th(M^*)$, кроме $Th(M)$, будет содержать всевозможные высказывания вида $0 < 1; 0.5 < 0.75; \ldots; \exists x (0 < x \wedge x < 0.00001)$ и так далее.

Задача 21. Докажите, что:

- структура M' эквивалентна структуре M тогда и только тогда, когда $M' \vDash Th(M)$;
- структура M' является элементарным расширением структуры M тогда и только тогда, когда $M' \vDash Th(M^*)$.

Второй пункт составляет задачу 135, дававшуюся ранее. При этом раньше структура M^* обозначалась по-другому.

Подсказка. Проверьте, что выполнены определения эквивалентности и элементарного расширения.

Решение. Эквивалентность означает совпадение множеств высказываний, истинных в одной и в другой структурах, то есть, совпадение их теорий. $M' \vDash Th(M)$ — означает, что все высказывания истинные в M (они образуют $Th(M)$) истинны в M'. С другой стороны, если в $Th(M')$ есть высказывание, не входящее в $Th(M)$, то его отрицание должно входить в $Th(M)$. Таким образом в $Th(M')$ вошли бы и высказывание его отрицание, что невозможно.

Вот еще соображения, используемые в доказательстве:

- Объектами построения у нас будут одновременно расширение исходной структуры $M = \langle A, \Sigma \cup \{R\} \rangle$ и автоморфизм, не сохраняющий R.
- Для доказательства элементарной эквивалентности мы будем использовать теории двух структур: $Th(L)$ и $Th(L^*)$ для некоторых L.
- Требование не инвариантности того отношения, неопределимость которого мы хотим установить, включим в теорию, просто потребовав не сохранения отношения на конкретном наборе объектов; для этих объектов и их образов при автоморфизме заготовим имена.
- Автоморфизм по ходу построения будет "конечным", не всюду определенным, но взаимно однозначным соответствием.

Напомним, что R — имя для отношения, неопределимость которого мы хотим доказать. Пусть n — количество аргументов этого отношения.

Определим теорию T_0. Добавим в сигнатуру имена $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n)$.
Далее:

- Мы будем использовать теорию T_0 для построения расширений исходной структуры, для этого поместим в нее $Th(M^*)$.
- Теория будет утверждать, что переход от объектов с новыми именами $a = (a_1, ..., a_n)$ к объектам с новыми именами $b = (b_1, ..., b_n)$ не сохраняет отношение R, то есть $\neg(R(a) \equiv R(b))$.
- Теория будет утверждать, что замена a на b в любой формуле Φ в сигнатуре Σ с n свободными переменными сохраняет значение формулы, то есть

  $\Phi(a) \equiv \Phi(b)$ для любой формулы Φ в сигнатуре Σ.

Конечно, нам нужно, чтобы построенная в конце концов теория была выполнимой, как и теории, возникающие по ходу дела. Естественно, для этого мы обычно будем использовать теорему компактности.
Докажем выполнимость T_0.

Будем рассуждать от противного и использовать теорему компактности. Пусть нашлась конечная часть нашей теории такая, что:
при любом выборе наборов a, b, если сохраняются значения высказываний из этой части при замене в них имен a на имена b, то значение имени R тоже сохраняется при замене a на b.
Покажем, что R определимо через отношения, определимые в нашей структуре.

Задача 22. Теория T_0 выполнима, если R не определимо.

Подсказка. Воспользуйтесь леммой об определимости кусочно постоянного отношения.

Решение. Решение отсутствует!

Обозначим через M_0 какую-нибудь счетную модель теории T_0.
Таким образом, мы построили структуру M_0 и взаимно однозначное соответствие между a и b, назовем его φ_0, обладающие свойствами:

- M_0 — расширение исходной структуры, в сигнатуру которого добавлены какие-то имена объектов;
- переход от значений набора a к набору значений $\varphi_0(a)$ не меняет значения формул, не содержащих R;
- переход от значений набора a к набору значений $b = \varphi_0(a)$ меняет значение R.

Задача 23. Докажите, что отображение φ_0 взаимно однозначно.

Подсказка. Формулы вида $(a_i = a_j) \equiv (b_i = b_j)$ входят в теорию T_0. Надо напомнить, что в сигнатуру входит равенство, и рассматриваются только нормальные модели.

Решение. Решение отсутствует!

Другими словами, мы построили требуемый автоморфизм, но действующий только на одном наборе объектов.

Определение 14. Конечный автоморфизм — взаимно однозначное соответствие на конечном подмножестве универсума структуры, сохраняющее на нем отношения, определимые в структуре.

Как действовать дальше?
Попробуем построить последовательность структур и конечных автоморфизмов: M_i, φ_i, для которой

- M_{i+1} — расширение структуры M_i, в сигнатуру которого добавлены какие-то имена объектов;

- φ_{i+1} — продолжение отображения φ_i.

При этом мы должны позаботиться о том, что

- объединение всех M_i окажется расширением структуры M, если оставить в сигнатуре объединения только элементы сигнатуры M;
- объединение всех φ_i окажется автоморфизмом объединенной структуры.

Начнем с того, как добиться того, чтобы объединение всех конечных автоморфизмов было взаимно однозначным отображением на всем "итоговом" универсуме.

Для этого заранее заготовим счетную последовательность счетных последовательностей имен. На очередном шаге построения нам могут понадобиться новые имена. Будем их брать из очередной последовательности имен. Номера — натуральные числа получат и значения этих имен — элементы расширяющейся последовательности универсумов.Этой фразы я не понял.

На каждом шаге построения будем выбирать первый объект, который еще не участвует в отображении φ_i. При этом можно поочередно брать элементы, которые не вошли в область определения и в область значений φ_i. Для этого элемента построим ему соответствующий, добавим их пару в φ_i. Это и даст нам φ_{i+1}.

Пусть у нас уже есть структура M_i и частичный автоморфизм φ_i этой структуры.
Выберем первый объект, который не попал в область определения φ_i, дадим ему какое-то еще не использованное имя — a. Возьмем еще какое-то не использованное имя — это b.
Перейдем к построению структуры M_{i+1}.
Начнем с построения теории T_{i+1}:

- Включим в эту теорию $Th(M_i^*)$.
- Пусть область определения φ_i состоит из m объектов, образующих вектор c; для каждой формулы в сигнатуре M_i^* от $m+1$ переменной включим формулу, означающую, что значение взятой формулы для $\langle \varphi_i(c), b\rangle$ – то же, что значение формулы для $\langle c, a\rangle$.

Самое время выяснить, есть ли у теории T_{i+1} модель.

Задача 24. Теория T_{i+1} выполнима.

Подсказка. Конечно, мы хотим воспользоваться теоремой компактности. Что может помешать выполнимости конечной подтеории? В эту подтеорию входит конечное число формул, говорящих, что значение некоторой формулы F на $\langle \varphi_i(c), b\rangle$ – то же, что значение формулы F на $\langle c, a\rangle$.

Воспользуйтесь тем, что φ_i — конечный автоморфизм в применении к формуле $\exists x(F(c,x))$
Здесь недостаточно того, что φ_i автоморфизм. Важно, что он сохраняет истинность формул. Конкретно, нам нужно сохранение формулы $\exists x(\wedge\{F(c,x) \mid F$ входит в конечную подтеорию$\}$

Решение. Решение отсутствует.

Итак, у теории T_{i+1} есть модель. Эта модель и есть наша M_{i+1}. Вернемся к конечным автоморфизмам.
Добавим к φ_i пару, состоящую из значений двух имен: $\langle a, b\rangle$.
Это и будет φ_{i+1}.

Задача 25. Докажите, что отображение φ_{i+1} взаимно однозначно, исходя из того, что φ_i взаимно однозначно.

Подсказка. Вспомните, как мы доказывали взаимно однозначность φ_0.

Решение.

Вспомним, что, переходя от φ_i к φ_{i+1}, мы рассмотрели случай расширения области определения конечного автоморфизма. Но мы упоминали, что будем чередовать шаги расширения области определения с расширением множества значений.

Задача 26. Проведите построение M_{i+1} и φ_{i+1}, в случае, когда мы добавляем элемент к образу φ_i.

Подсказка.

Решение.

Следующий шаг, как можно ожидать, это объединение всех M_i:
$M^* = \bigcup M_i$
Вернемся к автоморфизмам.

Задача 27. Объединение всех φ_i является автоморфизмом объединенной структуры.

Подсказка.

Решение.

Задача 28. Теорема Свенониуса.Повторяется то, что было раньше.
Пусть $M = \langle A, \Sigma \cup \{R\}\rangle$ — счетная структура. Следующие два условия эквивалентны:
(i) R не определимо в $\langle A, \Sigma\rangle$,
(ii) существует счетное элементарное расширение
$M' = \langle A', \Sigma \cup \{R\}\rangle$ структуры M и автоморфизм $\langle A', \Sigma\rangle$, не сохраняющий R.

Подсказка.

Решение.

Таким образом, метод автоморфизмов универсален. Добавляя в структуру «идеальные элементы», мы можем найти автоморфизм структуры, для которого неопределимое отношение — не инвариант.

Задача 29. Теорема Бета

Пусть $M = \langle A, \Sigma \cup \{R\} \rangle$ — счетная структура. Следующие два условия эквивалентны:
(i) R не определимо в $\langle A, \Sigma \rangle$,
(ii) существует такое счетное элементарное расширение
$M' = \langle A', \Sigma \cup \{R\} \rangle$ Видимо, здесь надо убрать R из сигнатуры.
и два разных отношения R' и R'' на A', что и $\langle A', \Sigma \cup \{R'\} \rangle$ и $\langle A', \Sigma \cup \{R''\} \rangle$ являются элементарными расширениями M.

Подсказка.

Решение.