Математическая логика и теория алгоритмов, 2 к., 2022

Вопросы курса

Наивная теория множеств

1. Принадлежность множеству, включение множеств. Операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение, прямое произведение.
2. Отношение, его интерпретация как подмножество прямого произведения, как характеристической функции, как свойства.
3. Отображения: инъективные, сюръективные, биективные.
4. Специальные виды двухместных отношений: эквивалентность, порядок, дерево.
5. Лемма Кёнига.
6. Счетные множества. Несчетность множества последовательностей нулей и единиц.
7. Теорема Кантора – Бернштейна.
8. Определение фон Неймана натуральных чисел в теории множеств.

Вполне упорядоченные множества

9. Полное упорядочение. Предельные и не предельные элементы.
10. Индуктивное доказательство для вполне упорядоченных множеств.
11. Индуктивное определение функции на вполне упорядоченном множестве.
12. Свойства начальных отрезков вполне упорядоченных множеств.
13. Единственность вложения для вполне упорядоченных множеств.
14. Возможность сравнения вполне упорядоченных множеств
15. Функция выбора. Существование функции выбора для вполне упорядоченного множества.
16. Теорема Цермело о возможности вполне упорядочения.
17. Аксиома выбора.
18. Возможность сравнения любых множеств по мощности.
19. Теорема Банаха – Тарского (без доказательства). Аксиома детерминированности игр.

Логические языки. Логика отношений

20. Язык и структура. Значения имен объектов и отношений.
21. Переменные. Контекст в универсуме. Термы, значения термов в контексте.
22. Атомные формулы, их значение в контексте.
23. Формулы логики отношений, индуктивное определение.
24. Однозначность анализа формул.
25. Имена и значения. Значения составных имен. Скобки.
26. Связанные и свободные вхождения переменных. Свободные переменные формулы.
27. Контексты. Отношения, определяемы формулами – бесконечноместное и на конечной степени универсума.
28. Высказывания. Истинность высказывания в структуре. Выполнимость высказывания. Истинные высказывания.
29. Эквивалентные формулы. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ).
30. Предваренная нормальная форма.
31. Игровая семантика логики отношений.

Элиминация кванторов в поле действительных чисел

32. Алгебра многочленов. Операция модифицированного деления.
33. Алгебра многочленов. Ключевые соображения о знаках и корнях.
34. Алгебра многочленов. Диаграммы.
35. Алгебра многочленов. Операции редукции.
36. Алгебра многочленов. Построение последовательности семейств.
37. Алгебра многочленов. Построение большой диаграммы.

38. Поле действительных чисел. Элиминация кванторов. Алгоритм выяснения истинности высказываний – разрешимость утверждений алгебры и геометрии.

Модальная логика

39. Модальная логика. Содержательный смысл модальностей.
40. Модальная логика. Индуктивное построение формул.
41. Модальная логика. Семантика Крипке.
42. Модальная логика. Свойства истинности.
43. Модальная логика. Выводимость. Непротиворечивость. Полнота (без доказательства).

Построение модели теории в логике отношений

44. Пространство двоичных последовательностей. Окрестности, покрытия, открытые и замкнутые множества.
45. Теорема компактности для пространства двоичных последовательностей.
46. Теорема компактности для компактного топологического пространства.
47. Теорема компактности для логики высказываний.
48. Теория, как пара множеств утверждений и опровержений. Определения модели, локально выполнимой теории. План доказательства теоремы компактности.
49. Теорема компактности. Построение дерева для локально выполнимой теории.
50. Теорема компактности. Один шаг в построении модели для теории в логике отношений для счетного языка.
51. Теорема компактности, организация процесса рассмотрения формул и выбор цепи.
52. Перечислимость множества следствий теории. Перечислимость истин.
53. Теорема компактности для счетного и для любого (без доказательства) языка. (Теорема Гёделя – Мальцева).

Теория моделей. Определения и примеры

54. Равенство в структуре. Нормальные структуры. Теория с равенством.
55. Существование нормальной модели для теории с равенством.
56. Теории линейного порядка, линейного порядка без наибольшего элемента, плотного линейного порядка без наибольшего и наименьшего элемента, дискретного линейного порядка с наименьшим и без наибольшего элемента. Примеры моделей этих теорий.
57. Изоморфизм структур.
58. Изоморфизм плотных порядков без наибольшего и наименьшего элемента.

Структуры и теории. Элементарные расширения

59. Теория структуры и класса структур.
60. Соответствие Галуа между теориями и классами структур.
61. Эквивалентность структур. Соотношение с изоморфизмом структур.
62. Элементарное расширение и подструктура структуры.
63. Критерий Тарского – Воота.
64. Теоремы Левенгейма – Сколема об элементарной подструктуре.
65. Теоремы Левенгейма – Сколема об элементарном расширении.

Полные теории

66. Полные теории. Существование пополнения.
67. ω-категоричность. ω-категоричность плотного порядка без наибольшего и наименьшего.
68. Признак Лося – Воота.
69. Нестандартные модели дискретного порядка с наименьшим элементом без наибольшего.
70. Сверхбольшая теория для дискретного порядка с наименьшим элементом без наибольшего.

71. Сверхбольшая структура – модель дискретного порядка с наименьшим элементом без наибольшего.
72. Пример полной, не ω-категоричной теории. Доказательство и обсуждение.

Теория определимости

73. Определимость отношения через множество отношений. Решетка определимости.
74. Автоморфизмы структур. Соответствие Галуа между решеткой определимости и решеткой надгрупп.
75. Примеры автоморфизмов и не определимости для решетки определимости порядка рациональных чисел.
76. Теорема Свенониуса (без доказательства).

Математическое изучение математики. Неполнота.

77. Попытка Кантора аксиоматизации теории множеств. Парадокс Рассела.
78. Теория ZF. Примеры аксиом.
79. Исчисление отношений.
80. Теория ZFC. Теоремы.
81. Достижение Лобачевского. Основания непротиворечивости геометрий.
82. Программа Гильберта
83. Парадокс Лжеца. Кодирование формул. Определимость подстановки.
84. Теорема Геделя – Тарского о неопределимости истины.
85. Определимость доказуемости в Программе Гильберта. Теорема Гёделя о неполноте.
86. Независимость в теории множеств (без доказательства).

Исчисления и алгоритмы

87. Исчисления.
88. Породимые множества. Операции над ними.
89. Выводы. Выводимость в исчислении. Существование выводов у породимых объектов.
90. Алгоритмы. Вычислимые функции.
91. Перечислимые и разрешимые множества. Операции над ними.
92. Универсальная вычислимая функция.
93. Пример перечислимого не разрешимого множества.
94. Равнообъемность перечислимости и породимости.

Породимость и вычислимость в теории множеств

95. Грамматики. Тезис Поста.
96. Машина Тьюринга. Тезис Чёрча.

Сложность объектов и вычислений

97. Сложность объектов. Теорема Колмогорова.
98. Сложность вычислений. Определения.
99. Задачи, решаемые перебором. Определение и примеры.
100. Универсальность задачи выполнимости формулы логики высказываний.
101. Проблема перебора.

Большие идеи (не входят в билеты)

102. Большая идея индуктивного определения формулы, однозначности анализа, индукции по построению и ее применения.
103. Большая идея объединения возрастающей цепи и ее применения.
104. Большая идея челночного построения соответствия и ее применения.
105. Большая идея компактности и ее применения.
106. Большая идея глобального поведения, определяемого локальными правилами.
107. Большая идея двоичного кодирования и ее применения.

108. Большая идея формулы и алгоритма, как цепочки символов, являющейся объектом – аргументом формул и алгоритмов и ее применения.
109. Большая идея универсальности и ее применения.