Лекции по математической логике и теории алгоритмов
А. Л. Семенов, 2022
Лекция 6

1 Построение модели теории в логике отношений

В этой лекции есть две части, не зависящие одна от другой. Одна часть (первые два раздела) относится к логике высказываний, другая — к логике отношений. Часть, относящаяся к логике высказываний имеет ясный топологический смысл, доказательство основной теоремы там несложно, сама теорема внутри курса не используется. Напротив, теорема для логики отношений идейно сложнее и в дальнейшем будет применяться неоднократно.
Общая большая идея двух частей состоит в том, что поведение бесконечной системы определяется поведением конечных ее частей.

1.1 Теорема компактности в топологии

Через B^ω будем обозначать множество бесконечных двоичных последовательностей. Можно считать, что это — последовательности нулей и единиц, нам будет далее удобно считать, что это — последовательность логических значений, например, И и Л.

Определение 1. *Окрестность* — множество всех бесконечных последовательностей, продолжающих данную конечную последовательность — *начало окрестности.*

Определение 2. *Открытое множество* — объединение какого-то множества окрестностей.

Задача 1. Дать определение *покрытия* множества системой множеств.

Подсказка. Конечно, мы исходим из того, что вы или где-то уже слышали определение покрытия, или будете исходить из смысла слова «покрыть» в русском языке. В крайнем случае — посмотрите в Википедии или Математической энциклопедии.

Задача 2. Из всякого покрытия всего B^ω открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Подсказка. Вспомните доказательство Леммы Кёнига.

Задача 3. Где мы использовали в доказательстве открытость множеств в покрытии? Можно ли это требование опустить и говорить о покрытии любыми множествами?

Подсказка. Конечно, множество B^ω покрыто просто семейством своих одноэлементных подмножеств, из которого нельзя выбрать конечного подсемейства.

Определение 3. Множество называется *замкнутым*, если оно является дополнением к открытому множеству.

Задача 4. Дополнение к окрестности открыто.

Подсказка. Каковы начала последовательностей, не лежащих в данной окрестности?

Если вместо B^ω рассмотреть действительные числа и обычное понятие окрестности, то дополнение к окрестности может не быть открытым.

Задача 5. (**Теорема компактности для B^ω**) Пусть дано семейство замкнутых подмножеств B^ω и пересечение любого конечного подсемейства этого семейства — не пусто. Тогда и пересечение всего семейства не пусто.

Подсказка. Воспользуйтесь тем, что дополнение к пересечению любого семейства множеств — это объединение дополнений к ним и наоборот, дополнение к объединению — это пересечение дополнений.
Если Вы не знаете этих фактов, докажите их.

Большая идея. Локальное поведение (поведение в конечном, ситуация в конечной части) определяет глобальное (поведение на бесконечности, поведение системы в целом).

Задача 6. Приведите пример семейства замкнутых множеств действительных чисел, для которого пересечение всякого конечного семейства множеств не пусто, а пересечение всего семейства — пусто.

Подсказка. Луч (включая его начало) — замкнут.

Если кто-то не знает определения топологического пространства, можно посмотреть его в Википедии или Математической энциклопедии, или пропустить следующее определение и задачу.

Определение 4. Топологическое пространство называется *компактным*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Задача 7. (**Теорема компактности в топологии**) Пусть дано семейство замкнутых множеств компактного пространства. Если всякое конечное подсемейство имеет непустое пересечение, то и пересечение всех множеств семейства не пусто.

Подсказка.

1.2 Теорема компактности в логике высказываний

Напомним, что язык *логики высказываний* — это частный случай языка логики отношений. В нем все имена отношений — нульместные, имен объектов, переменных и

кванторов — нет. Будем считать, что имена нульместных отношений образуют счетную последовательность $A_1, A_2, ...$ Атомными формулами, естественно, являются в точности члены этой последовательности.
Значение каждого из этих имен $A_1, A_2, ...$ в заданной структуре — это И или Л (можно считать, что 1 или 0). Очевидно, что и значение каждой атомной формулы, и вообще любой формулы определяется последовательностью значений всех A_1, A_2, . . . и от того, какой мы взяли универсум для структуры, не зависит.
Далее в этом разделе все формулы — это формулы логики высказываний, то есть — высказывания.

Определение 5. *Значение высказывания* на элементе $a_1 a_2 ... \in B^\omega$ — это значение этого высказывания в любой структуре, где в качестве значений A_1, A_2, . . . взяты $a_1, a_2 ...$

Задача 8. Множество, на котором данное высказывание истинно — это открытое подмножество B^ω. То же — для множества, на котором высказывание ложно.

Подсказка. Высказывание содержит лишь конечное число атомов — элементов сигнатуры.

Задача 9. Множество, на котором высказывание истинно — это замкнутое подмножество B^ω.

Подсказка. Посмотрите, где высказывание ложно.

Определение 6. Семейство высказываний логики высказываний *выполнимо*, если существует последовательность, на которой все высказывания семейства истинны.

Задача 10. Приведите примеры выполнимых и не выполнимых множеств высказываний.

Задача 11. (**Теорема компактности для логики высказываний**) Пусть дано семейство высказываний. Если всякое его конечное подсемейство выполнимо, то и все семейство выполнимо.

Подсказка. Воспользуйтесь теоремой компактности для B^ω.

1.3 Теорема компактности для логики отношений

Ранее в этой лекции мы рассматривали логику высказываний — частный случай логики отношений, где все отношения нульместные. В этой ситуации имена объектов, переменные и кванторы не используются.
Теперь мы возвращаемся к общей ситуации логики отношений.
Напомним ряд определений из Лекции 3, где мы начали изучать логику отношений:

Определение 7. *Высказывание* логики отношений — формула без свободных переменных.

Таким образом, любая формула логики высказываний является высказыванием логики отношений, но, конечно, не любое высказывание логики отношений является формулой логики высказываний.
Понятие значения формулы в заданной структуре определяется индуктивно. Мы это сделали в третьей лекции. Значением формулы с n свободными переменными является n-местное отношение на универсуме структуры. В заданной структуре значение высказывания — И или Л.

Определение 8. Семейство высказываний T *выполнимо*, если существует структура S, где все высказывания семейства истинны. Эта структура называется *моделью* семейства.
Обозначение: $S \models T$

Задача 12. (**Предварительный вариант теоремы компактности для логики отношений**) Пусть дано семейство высказываний логики отношений. Если всякое его конечное подсемейство выполнимо, то и всё семейство выполнимо.

Решению этой задачи (доказательству теоремы компактности) посвящена основная часть настоящей лекции. Формулировку теоремы, возможно, уточним по ходу дела, если будет что-то не получаться.

В математической логике, говоря о соотношении между множествами высказываний и структурами, произвольное множество высказываний часто называют *теорией*, множество всех высказываний, истинных в какой-то структуре — *теорией* этой *структуры*.
Итак, наша цель — попытаться построить модель для некоторой теории, такой, что всякая ее конечная часть модель имеет.
Важные комментарии.
Последовательность задач, которые приведут нас к построению модели, составлена так, что наше представление о модели, процессе ее построения и нужных для этого свойствах теории будут проясняться постепенно, как обычно и бывает, когда математик доказывает нетривиальную теорему. Полное представление о процессе и результате построения и точную формулировку теоремы мы получим в конце.
Модель будем строить постепенно, определяя ее универсум и значения имен сигнатуры. В ходе построения будем стремиться, чтобы высказывания теории оказались истинными в строящейся структуре. Однако в ходе построения нам будет полезно добиваться еще и ложности каких-то высказываний. Для удобства мы расширяем наше понятие теории и на протяжении данной лекции будем исходить из следующего «технического» определения.

Определение 9. *Теория* — это произвольная пара множеств высказываний $\langle$Утверждаемое, Опровергаемое$\rangle$, будем их обозначать также У и О.

В ходе построения модели мы будем стремиться к тому, чтобы высказывания из «Утверждамого» оказались истинными, а из «Опровергаемого» — ложными.

Будем считать, что из логических связок в языке есть только $\neg, \exists, \vee$. Другие логические связки можно выразить через эти.

Определения, которые мы давали для теорий в обычном смысле, естественно переносятся на теории в «техническом» смысле доказательства данной лекции. Только так мы и будем понимать слово «теория», доказывая теорему компактности для логики отношений. В следующей задаче попробуйте дать определение, исходя из предыдущих определений и вашего понимания терминов «Утверждаемое», «Опровергаемое».

Задача 13. Дайте определения *модели теории* и *выполнимой теории*, для теории в новом смысле, обобщающие определения, данные раньше, на лекции, где вводилась логика отношений. (Эти прежние определения мы будем использовать вне доказательства.)

Подсказка. Какие значения в модели должны получить элементы из У и О? Как обычно, если это неясно, можете переходить к чтению решения.

Определение 10. Теория *локально выполнима*, если у любой конечной части этой теории есть модель.

Задача 14. Для (локально) выполнимой теории У и О не пересекаются.

Начнем строить структуру, которая будет являться моделью теории. Для этого надо определить:

1. Универсум.
2. Значения имен объектов теории.
3. Значения имен отношений теории.

Структуру будем строить постепенно, при этом, в конечном итоге окажется, что:

1. Универсум: имена объектов теории.
2. Значение всякого имени объекта — оно само.

Задача 15. Для каких имен отношений и каких имен объектов мы можем сразу указать значение соответствующего отношения на соответствующих объектах?

Подсказка. Для атомных высказываний об объектах теории.

Информацию, необходимую для построения модели, мы будем извлекать из теории (больше ее брать неоткуда). Информацией, в конечном счете, будут атомные высказывания об истинности тех или иных строящихся отношений на тех или иных объектах строящейся структуры. Эти высказывания будут возникать в ходе разложения составных высказываний теории на более простые формулы. При этом мы будем заботиться о сохранении выполнимости — о том, чтобы не возникало противоречий. Для этого некоторые из возникающих формул мы будет помещать в У, некоторые в О. Одновременно у нас может возникнуть потребность в расширении универсума — будем добавлять новые имена объектов (а сами объекты будут совпадать с этими именами).

Вот описание плана расширения теории; мы будем его осуществлять (и понимать) постепенно:

- Строим последовательность расширений: каждый элемент последовательности — теория, расширяющая предыдущую:
  - Берем из предыдущей составное высказывание, выделяем его составляющие; (какое высказывание брать — обсудим ближе к концу построения).
  - Добавляем в теорию более простые высказывания, получаемые из составного, решаем, что положить в У, что — в О. Возникает следующая теория.
  - Действуем так, чтобы получаемая теория на каждом шаге оставалась локально выполнимой, если таковой была предыдущая теория.
- Нам могут потребоваться новые элементы универсума. Расширяем универсум.
- Полученные новые атомные высказывания дают информацию о значениях имен отношений, в том числе — на новых элементах универсума в требуемой модели.
- Строя расширения теории, получаем все больше информации для строящейся модели. Саму модель полностью определим как результат всего бесконечного построения.
- Если мы начали с локально выполнимой теории (чего не знаем), то процесс будет бесконечным и ведет к построению модели.
- Если теория не была выполнимой, то процесс завершится, зайдет в тупик на конечном шаге, следующего шага сделать не удастся.

Случаи, которые нужно рассматривать при построении очередной теории, соответствуют разным видам составного высказывания, которое мы берем, и тому, откуда мы его берем:

- Взяли высказывание из У или О?
- Составное высказывание — это:
  - $\neg A$,
  - $\exists x A(x)$,
  - $A \vee B$?

Мы будем добавлять какие-то более простые формулы в теорию; будем указывать — какие, и куда добавляем — в У или О.
Заметьте, что в наших формулах не хватает скобок, о которых мы договаривались, когда определяли синтаксис языка, но вы легко скобки восстановите.

Задача 16. Составное высказывание — это:
$\neg A$
Случаи:
Взяли высказывание из У или О?

- Что (более простое) и куда добавляем?
- Проверьте сохранение локальной выполнимости.

Подсказка. Тут нам пригодится, что мы заранее заготовили У и О.
Не забудьте про локальную выполнимость.

Задача 17. Составное высказывание — это:
$\exists x A(x)$
Случаи:
Высказывание из У или О?

Что (более простое) и куда добавляем?
$\exists x A(x)$ — из О $\Rightarrow$ $A(c)$ добавляем в О, для всех имен объектов c из предыдущей теории
$\exists x A(x)$ — из У $\Rightarrow$ $A(c)$ добавляем в У, для одного нового имени c (расширяем язык теории)

Проверьте сохранение локальной выполнимости.

Подсказка. Почему формула не могла входить одновременно в У и О?
Что нужно взять в качестве значения c, если $\exists x A(x)$ — из У?

Задача 18. Составное высказывание — это:
$A \vee B$
Что делать, чтобы сохранить локальную выполнимость?
$A \vee B$ — из О $\Rightarrow$ A и B добавляем в О

$A \vee B$ — из У $\Rightarrow$ мы заранее не знаем, добавить в У высказывание A или высказывание B. Если мы добавим оба, то непонятно, как нам удастся сохранить локальную выполнимость.

Подсказка. надо разветвить последовательность построения теории. Последовательность наша станет (ориентированным) деревом и у нас будет два варианта следующей теории:
Переходя по одной ветви дерева, A помещаем в У.
Переходя по другой ветви дерева, B помещаем в У.

Проверьте сохранение локальной выполнимости хотя бы по одной из ветвей.

Итак, пользуясь решениями трех предшествующих задач, мы строим дерево, а не просто последовательность теорий, как собирались с самого начала. На каждом шаге добавляем одну или две (случай дизъюнкции) вершины к какому-то листу. Возникают альтернативные теории, которые и являются вершинами дерева.
Заметим также, что на некоторых шагах мы расширяем язык теории (случай существования).
Наконец, видно, зачем нам нужны компоненты У и О теории (случай отрицания).
Если теория локально выполнима, то в какой-то следующей вершине (может быть, и в двух) теория локально выполнима.

Задача 19. Могут ли в какой-то вершине У и О пересечься? Что делать тогда?

Будем называть вершину дерева *тупиком*, если из нее не выходит ребер.

Подсказка. Подумайте, в какой ситуации может возникнуть такое пересечение.

Задача 20. Что значит, что всякий путь в дереве заканчивается тупиком? Что можно сказать о локальной выполнимости исходной теории?

Подсказка. Рассмотрите случай, когда в исходной теории были только атомные формулы.

Пусть теперь у нас не все пути заканчиваются тупиками. Тогда дерево может оказаться бесконечным, например, если в У исходной теории содержалось бесконечное число дизъюнкций.
Приступим, наконец, к построению модели нашей теории. Как определить структуру, где (исходная) теория и ее построенные расширения выполнимы:

1. Универсум

2. Значения имен объектов теории

3. Значения имен отношений теории

Начнем с того, что, используя построенное дерево, попытаемся построить универсум модели.

Задача 21. Покажите, что если дерево бесконечно, то в нем есть бесконечный путь, начинающийся в корне.

Подсказка. Сколько ребер может выходить в нашем дереве из вершины?

Задача 22. Как построить универсум модели?

Подсказка. Что нам нужно положить в универсум?

Итак, у нас есть путь, в котором сохранялась локальная выполнимость теории и есть универсум, построенный исходя из этого пути. Следующее, что требуется, это определить отношения — значения элементов сигнатуры.

Задача 23. Как достроить структуру, в которой выполнена наша теория — определить значения элементов сигнатуры на построенном универсуме?

Подсказка. Как использовать появляющиеся на пути атомные формулы?

Итак, у нас есть путь, на котором сохранялась локальная выполнимость, есть теория, объединяющая все теории этого пути, есть структура: универсум и значения всех элементов сигнатуры на некоторых наборах элементов универсума, возможно, не на всех. Прежде, чем определить эти значения на всех наборах, давайте попытаемся доказать выполнимость нашей теории.

Задача 24. Попытайтесь провести доказательство того, что построенная структура является моделью расширенной теории. Не возникает ли трудностей?

Подсказка. Действуйте индукцией по построению (определению) формулы.

Задача 25. Как все-таки доказать выполнимость построенной теории? Как преодолеть обнаруженную трудность?

Подсказка. Обратите внимание, что мы пока никак не фиксировали процедуры выбора очередной формулы, для которой мы включали в следующую вершину более простые формулы.
Попробуйте еще раз вернуться в построении пути к формуле с квантором.

Задача 26. Сформулируйте и докажите теорему компактности для логики отношений.

Подсказка. Просмотрите построение модели еще раз.

Видим, что доказали мы теорему для ограниченного класса теорий — счетных, тех, где сигнатура и множество высказываний — счетны. Сам процесс построения состоял из счетного числа шагов, в ходе которых нам удалось обращаться ко всем высказываниям теории (и даже — по многу раз). Но для этих теорий доказали ее в более сильной форме — установили существование не любой модели, а даже счетной.

Однако теорема компактности верна и для любых теорий, в частности, с несчетными языками. Такие языки могут возникать, если мы, например, хотим рассматривать имена всех действительных чисел и т.п.

Теорема 1. ***(Теорема Мальцева: теорема компактности для логики отношений.)*** *Если любая конечная часть теории имеет модель, то и вся теория имеет модель.*

Конечно, и модель здесь может оказаться несчетной.

Теорему Мальцева мы приводим без доказательства. Мальцев ее доказал, используя трансфинитную индукцию, и использовал для получения важных утверждений в теории групп.

Как можно ожидать, в обычно используемой формулировке Теоремы компактности под теорией подразумевается только множество У — высказываний, которые должны выполниться в модели, а множество О — пусто. Конечно, этот вариант теоремы компактности — частный случай нашей формулировки.

Определение 11. Высказывание *следует из теории* (другими словами — является *следствием* из нее), если оно истинно во всякой модели этой теории.

Следующая задача — это, фактически, упражнение на понимание определений.

Задача 27. Приведите пример теории и высказывания, которое истинно в одних моделях этой теории и ложно в других.

Задача 28. Приведите пример теории, у которой нет моделей. Что является множеством ее следствий?

Подсказка. Что будет, если в теорию поместить всегда ложное высказывание?

Задача 29. Если высказывание является следствием счетной теории, то оно является следствием некоторой конечной части этой теории.

Подсказка. Разговоры о конечности наводят на идею использовать теорему компактности.

Можно представить себе, что имеется бесконечная теория в обычном, не "техническом" смысле и у нас есть какой-то источник ("оракул") постепенного получения всё новых и новых высказываний этой теории. Пусть, далее, известно, для всякого высказывания из теории, что когда-то источник его нам выдаст. Есть ли у нас надежда в такой ситуации убедиться когда-то, что данное высказывание является следствием теории? Оказывается — есть.

Задача 30. Теорема о проверке следствий. Пусть есть функция, определенная на натуральном ряде, множество значений которой совпадает с некоторой теорией. Тогда существует алгоритм, который, используя эту функцию, по каждому высказыванию определяет за конечное время, что оно является следствием теории, или работает бесконечно, если оно следствием не является.

Подсказка. Будем строить модель, как мы делали в доказательстве теоремы о построении модели для теории из двух компонентов. Поместим в О высказывание, о котором мы хотим выяснить, является ли оно следствием, а сообщаемые элементы теории будем помещать в У.

Мы говорим, что алгоритм перечисляет некоторое множество S, если множество его исходных данных — все натуральные числа и на каждом числе он закачивает работу и при этом множество результатов его работы есть S. Например, нетрудно построить алгоритм, перечисляющий все формулы заданной сигнатуры.

Задача 31. Теорема о перечислимости следствий. Если существует алгоритм, перечисляющий элементы теории, то существует и алгоритм, перечисляющий все следствия этой теории.

Подсказка. Нужно переделать алгоритм из предыдущей задачи так, чтобы он всегда заканчивал работу, пусть даже и не выдавая новых следствий, а предлагая какое-нибудь старое.

Наше решение, конечно, является просто примером общей конструкции теории алгоритмов, которую мы будем рассматривать дальше.

Среди высказываний логики отношений важное место занимают высказывания, которые верны в любой структуре. Мы уже упоминали, скажем $B \vee \neg B$, где B — произвольное высказывание. Их можно называть истинами или тавтологиями логики отношений, тавтологии логики высказываний — это их частный случай. Иногда их называют также общезначимыми высказываниями. Из определения сразу вытекает, что истина следует из любой теории, в частности — из пустой.

Определение 12. Истина или общезначимое высказывание логики отношений — то, что выполнено в любой модели пустой теории.

Следующая теорема является очевидным следствием предыдущей задачи. Конечно, следствия из пустой теории — это то же, что следствия из какой-то тавтологии. Алгоритм, перечисляющий теорию, конечно, не нужен, но мы можем взять алгоритм, все время выдающий эту тавтологию.

Теорема 2. ***(Теорема о полноте)*** *Истины логики отношений перечислимы.*