Лекции по математической логике и теории алгоритмов
А. Л. Семенов, 2022
Лекция 13

1 Породимость и вычислимость в теории множеств

В это лекции, как и в лекции "Математическое изучение математики. Неполнота в отличие, например, от предыдущей лекции про исчисления и алгоритмы будет немного задач. Специфика ее в том, что в ней постулируется принятая в современной математике равнообъемность ключевых математических понятий прошлой лекции с некоторыми описываемыми ниже в стандартных математических терминах теории множеств частными случаями этих понятий.
Задачи здесь — это, в основном, иллюстративные упражнения.

1.1 Грамматики

Грамматики — это исчисления специального вида. Мы их и описываем как такие.

Определение 1. Грамматика — это:

- *Алфавит грамматики* — объединение непересекающихся основного и вспомогательного алфавитов.
- *Начальный символ* S из вспомогательного алфавита.
- *Классы грамматики*:
  - Все цепочки
  - Цепочки в основном алфавите
- *Правило грамматики* определяется конечным множеством *замен* —- пар цепочек в алфавите. Оно состоит из пар: $<\{\}, S>, <\{tup\}, tvp>$, где $<u, v>$ — замена, t, p — произвольные цепочки в алфавите. Класс всех участвующих цепочек — все цепочки.

Цепочка порождается грамматикой, если это — породимое слово в основном алфавите.

Пример грамматики. Начальный символ S Замены (будем использовать $->$ для обозначения замены):

$S->0$

$S- > 1$
$S- > (S) + (S)$

Задача 1. Доказать, что следующие цепочки порождаемы: $0, 1, \ldots$ (1)+((0)+((0)+(1))). Доказать, что следующие цепочки не порождаемы: 11, (0)+((0)+(1)))

Подсказка. Начните выписывать, что можно получить из начального символа.

Как мы уже отмечали в начале лекции, породимость определялась за пределами теории множеств: мы ссылались на человека и его деятельность.
Однако вся человеческая практика, включая применение компьютеров, подтверждает следующее положение.
Тезис (Поста). Для всякого породимого множества существует грамматика, его порождающая.

1.2 Машины

Рассмотренные нами начальные теоремы, относящиеся к вычислимости, использовали представления о выполнении алгоритмов человеком или каким-то еще исполнителем. Можно попытаться описать возможные способы вычисления функций, используя понятия обычной математики конечных множеств. Это было сделано, в частности, Аланом Тьюрингом в 1936 году. Наше определение «вычислимости по Тьюрингу» несущественно отличается от других изложений этого понятия.

Определение 2. Машина Тьюринга — это:

- *Алфавит машины* — объединение непересекающихся основного и вспомогательного алфавитов. Во вспомогательном алфавите есть символы НАЧАЛО, СТОП и пустой символ (пробел).

- *Функция перехода машины*: отображение из цепочек длины 3 в цепочки длины 3 в алфавите. Цепочка из трех пустых символов — неподвижна (переходит в себя).

Удобно представлять себе цепочку, с которой имеет дело машина, написанной на бесконечной ленте; только конечное число ячеек (символов) ленты — не пустые.
Машина Тьюринга задает следующий алгоритм, который мы представляем описывая вычисления.

Определение 3. *Вычисление машины*

- на первом шаге Действие переработки состоит в том, что в клетке перед началом цепочки пишется символ НАЧАЛО.

- на последующих шагах Действие переработки состоит в том, что ко всем тройкам символов ленты применяется функция перехода; если это не удается сделать, то лента не меняется и после всех символов пишется СТОП. Символ СТОП может появляться и в других ситуациях.
- Проверка остановки — проверка наличия символа СТОП.
- При наличии символа СТОП действие переработки состоит в том, что в цепочке стираются все символы, кроме 0,1.

Определение 4. ункция вычислимая по Тьюрингу — это функция, вычислимая машиной Тьюринга.

Пример двухмерной машины. Игра «Жизнь»

- Бесконечная клетчатая бумага.
- Алфавит клеток: пустой символ — мертвая, 1 — живая.
- Функция перехода: У клетки 8 соседей.
  - Если у мертвой клетки есть ровно 3 живых соседа, она становится живой.
  - Если у живой клетки есть ровно 2 или 3 живых соседа, она продолжает жить.
  - Если у живой клетки меньше 2 или больше 3 живых соседа, она умирает.

Задача 2. Д. Поэкспериментировать с Игрой Жизнь.

Подсказка. Рассмотрите конфигурации из небольшого количества живых клеток.

Поразительная гипотеза Алана Тюринга состояла в том, что:
любая вычислимая функция на двоичных цепочках (а значит — на натуральных числах и на любых объектах, которые можно такими цепочками кодировать) вычисляется машиной Тьюринга.

Это утверждение называется **Тезисом Чёрча**. Вся последующая вычислительная практика человечества подтверждает этот тезис.