Лекции по математической логике и теории алгоритмов
А. Л. Семенов, 2022
Лекция 10

1 Решётка определимости. Автоморфизмы

Определение 1. Пусть задан универсум U, множество S отношений на U и объектов из U.
Возьмем в S произвольное конечное подмножество. Дадим его элементам имена. Напишем любую формулу логики отношений. Ее значение — некоторое отношение R на U.
Мы говорим, что отношение R *определимо* через S.

Заметим, что объем определяемого нами понятия не изменится, если сразу дать имена всем элементам S.

Определение 2. *Замыкание* S — все, что определимо через S. *Замкнутое множество* — совпадающее со своим замыканием.
Замкнутые множества мы называем также *пространствами определимости.*

Определение 3. (напоминание) *Частичный порядок* — двухместное рефлексивное, транзитивное, антисимметричное отношение $\leqslant$. Структура, состоящая из множества и заданного на нем частичного порядка, называется *частично упорядоченным множеством (чум).*

Задача 1. Запишите условия рефлексивности, транзитивности, антисимметричности отношения.

Подсказка. Попробуйте вспомнить, с учетом интуитивного смысла терминов, если не получится, посмотрите лекцию 1.

Конечно, рефлексивность и антисимметричность естественно объединить в одно условие (подумайте, как?).

Задача 2. Дайте определения *точной верхней грани* (твг, sup) и *точной нижней грани* (тнг, inf) двух элементов чум.

Подсказка. Вспомните определения из математического анализа, относящиеся к действительным числам.

Определение 4. *Решетка* – это частично упорядоченное множество, где у любых двух элементов есть точная верхняя и точная нижняя грани.

Задача 3. Докажите, что следующие структуры являются решетками:

1. множество всех подмножеств данного множества, упорядоченное по включению; что будет твг и тнг?
2. всякое линейно упорядоченное множество; что будет твг и тнг?
3. множество всех подпространств векторного пространства, упорядоченных по включению, что будет твг и тнг?
4. множество положительных целых чисел, упорядоченных по делимости; что будет твг и тнг?
5. множество подгрупп данной группы; что будет твг и тнг?
6. множество подпространств данного пространства определимости, упорядоченных по включению; что будет твг и тнг?

Подсказка. Утверждения непосредственно следуют из определений.

Последняя из решеток — образованная пространствами определимости, является предметом изучения теории определимости и называется *решеткой определимости.*

Определение 5. Пусть задан универсум U.
Перестановкой универсума называется любое взаимно однозначное отображение U на себя.
Заметим, что всякая перестановка ϕ универсума U задает также перестановку всех контекстов над U: перестановка контекста действует как ϕ на каждом компоненте контекста.
Группа всех перестановок множества U обозначается $\mathrm{Sym}(U)$.

Следующее понятие нам уже встречалось.

Определение 6. Пусть на U задано множество отношений S.
Перестановка U, сохраняющая отношения из S, называется *автоморфизмом* S. Все автоморфизмы S образуют группу, называемую *группой автоморфизмов* этого множества отношений — $Aut(S)$.

Задача 4. Если перестановка универсума сохраняет множество отношений, то она сохраняет все отношения, определимые через это множество.

Подсказка. Мы уже доказывали и использовали это в частном случае. При естественной точке зрения утверждение очевидно. Естественно действовать индукцией по построению формулы.

Определение 7. Пусть в группе перестановок задана подгруппа G. Мы назовем эту подгруппу *замкнутой*, если всякая перестановка, совпадающая на любом конечном множестве с каким-то элементом из G, сама лежит в G.

(Обратите внимание, что здесь слово «замкнутый» имеет иной смысл, чем выше, при определении пространства. В данном случае, это слово связано с топологией, попробуйте проследить связь с теоремой компактности для топологических пространств.)

Задача 5. Докажите, что группа автоморфизмов любого множества отношений — замкнута.

Подсказка. Что значит, что перестановка НЕ сохраняет множество отношений?

Определение 8. Пусть дано произвольное множество перестановок T. Отношение называется *инвариантом* этого множества, если оно сохраняется под действием любого элемента из T.

Задача 6. Пусть для множеств перестановок G, H выполнено $G \subseteq H$. Что можно сказать о соответствующих множествах инвариантов?

Подсказка. Используйте определение.

Задача 7. Пусть для множеств отношений S, P выполнено $S \subseteq P$. Что можно сказать о соответствующих группах автоморфизмов?

Подсказка. Используйте определение.

Аналогично понятию подгруппы, можно определить понятие *надгруппы*.

Определение 9. Пусть дана произвольная группа T перестановок некоторого множества. Группа перестановок того же множества называется надгруппой T, если она содержит T.

Задача 8. Пусть задано пространство определимости S. Тогда два отображения:

- отображение, ставящее в соответствие каждому подпространству в S его группу автоморфизмов $Aut(S)$ и
- отображение, ставящее в соответствие каждой замкнутой надгруппе G группы $\mathrm{Aut}(S)$ пространство инвариантов этой надгруппы $Inv(G)$

образуют соответствие Галуа.

Подсказка. Соответствие Галуа нам уже встречалось, как соответствие между теориями и классами моделей. Если его переписать как соответствие между пространствами определимости и замкнутыми группами, получится вот что:

- Отображения Aut, Inv — (нестрого) монотонно убывающие (другими словами — антимонотонные).
- $G \subseteq Aut(S) \iff S \subseteq Inv(G)$;

- $S \subseteq Inv(Aut(S))$;
- $G \subseteq Aut(Inv(G))$.

Итак, со всякой структурой связано ее *пространство определимости* — это все отношения, определимые через отношения и объекты, являющиеся значениями элементов сигнатуры. Соответственно определяется *решетка определимости* данной структуры.

Возьмем в качестве универсума рациональные числа, а в качестве пространства отношений — все отношения, определимые через порядок рациональных чисел.

Задача 9. Какова группа автоморфизмов порядка рациональных чисел? Будет ли любой автоморфизм непрерывным?

Подсказка. Попробуйте нарисовать график автоморфизма.

Задача 10. Можно ли через отношение порядка на рациональных числах определить отношение «быть числом 0»?

Подсказка. Автоморфизмы должны сохранять все определимое, все инварианты.

Содержательно понимаемое отношение «между» определимо через отношение порядка в любом линейно упорядоченном и даже — частично упорядоченном множестве.

Задача 11. Напишите формулу, определяющую отношение $B(x, y, z)$: x «между» y и z через отношение порядка.

Подсказка. Что может значить «между»?

Задача 12. Определимо ли отношение порядка на рациональных числах через отношение «между»?

Подсказка. Попробуйте придумать автоморфизм отношения «между», который не сохраняет отношение порядка на рациональных числах.

Задача 13. Определимо ли отношение следования на целых числах: $x + 1 = y$ через отношение прибавления двойки?

Подсказка. Надо придумать автоморфизм. Он может действовать по-разному на четных и нечетных числах.

Из этих простых примеров можно сделать следующие простые выводы:

- доказать определимость одного отношения через другое (или другие) можно, предъявив требуемую логическую формулу; доказать неопределимость — сложнее;

- доказать неопределимость отношения можно, найдя автоморфизм пространства определимости, не сохраняющий это отношение.

Можно было бы надеяться, что не определимость какого-то отношения через другие ВСЕГДА можно доказать, подобрав подходящий автоморфизм. Однако простые примеры подсказывают, что это не так: бывает, например, что автоморфизмов нет вовсе (кроме тривиального), а определимость через какое-то множество отношений удается описать, и ясно, что данное отношение этому описанию не соответствует, но с помощью автоморфизмов этого не докажешь.
Однако все не так плохо. Мы не зря занимались базовыми понятиями теории моделей. Можно воспользоваться следующими обстоятельствами:

- если две структуры эквивалентны (в частности, если одна есть расширение другой), то определимость в одной из них влечет определимость в другой.

- группы автоморфизмов эквивалентных структур могут различаться.

Задача 14. Определимо ли отношение следования на натуральных числах: $x + 1 = y$ через отношение соседства: «расстояние между числами равно единице»?

Подсказка. У отношения соседства на натуральных числах нет изоморфизмов. Действительно, у нуля нет соседей, значит, ноль переходит в ноль; единственный сосед нуля, это единица, значит, единица переходит в единицу и т.д.
Рассмотрите расширение структуры следования натуральных чисел аналогично тому, как это делалось в доказательстве не ω-категоричности и полноты теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$, описывающей порядок натуральных. Добавьте «после натуральных одну галактику целых». У структуры $\mathbb{N}+\mathbb{Z}$ с отношением соседства автоморфизмы есть, например – отражение (смена знака) у элементов второго слагаемого. Ясно, что указанная сейчас перестановка не сохраняет отношение $+1$.

Возникает надежда на доказательство неопределимости путем подбора расширения исходной структуры и некоторого автоморфизма этого расширения. Оказывается, что этой надежде суждено сбыться, как показал Ларс Свенониус в 1959 году. Доказательство это важной теоремы мы не будем обсуждать на лекциях, оно не входит в экзаменационный материал. Но оно имеется в конспекте курса (размещенном в интернете, там это – следующая лекция) и его можно обсуждать с преподавателями.
Теорема Свенониуса.
Пусть $M = \langle A, \Sigma \rangle$ —- счетная структура, $\Sigma' \subset \Sigma$, $P \in \Sigma$.
Следующие два условия эквивалентны:
(i) P не определимо в $\langle A, \Sigma' \rangle$,
(ii) существует счетное элементарное расширение $M' = \langle A', \Sigma \rangle$

структуры M и автоморфизм структуры $\langle A', \Sigma' \rangle$, не сохраняющий P.

Теорема Свенониуса говорит, что при доказательстве не определимости для разных отношений могут потребоваться разные расширения.
Ситуация существенно упрощается, если среди таких расширений есть наибольшее.

Определение 10. Структура называется *полной вверх*, если у нее нет элементарных расширений (то есть всякое ее элементарное расширение ей изоморфно).

Определение 11. *Пополнение вверх* структуры – это полное вверх ее расширение.

Определение 12. *Антиизоморфизмом решеток* называется взаимнооднозначное соответствие между их универсумами, при котором отношение $\leqslant$ переходит в $\geqslant$.

Задача 15. Докажите, что для всякой пополнимой вверх структуры ее решетка определимости антиизоморфна некоторой решетке замкнутых надгрупп группы автоморфизмов ее пополнения вверх.

Подсказка. Утверждение задачи является комбинацией определений, доказанных ранее утверждений и теоремы Свенониуса.

Задача 16. (Дополнительная)

Построить решетки определимости для структур

- $\mathbb{Q}$
- $\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$

Подсказка. Попытаться найти как можно больше разных подпространств в этих структурах и группы автоморфизмов для этих пространств.

Задача 17. (Открытая проблема) Построить решетки определимости для структур

- $\langle \mathbb{N}; +1 \rangle$
- Множество пар целых чисел с операциями добавления 1 к каждой из компонент.

Подсказка. Попытаться найти как можно больше разных подпространств в этих структурах и группы автоморфизмов для этих пространств.