Лекции по математической логике и теории алгоритмов,
А. Л. Семенов, 2022
Лекции 1 и 2

Содержание

1 Наивная теория множеств **3**

2 Вполне упорядоченные множества **8**

Введение

Замечательный американский математик Пол Халмош сказал: “Лучший (и единственный) способ изучать математику — это ее создавать”. Он, конечно, не имел в виду, что школьники и студенты должны доказывать неизвестные науке теоремы. Идея в другом: чтобы научиться доказывать новые для человека утверждения, намного эффективнее пытаться их доказывать, чем читать, слушать и выучивать чужие доказательства.
Замечательно, что человек, научившийся решать новые математические задачи, которые «непонятно-как-решать», потом сможет использовать это умение и в жизни, если он не станет математиком-исследователем, а будет программистом, или даже займется делом, далеким от математики.
В России такой подход использовался в работе математических кружков — и студенческих и аспирантских кружков, таких как «Школа Лузина» — «Лузитания» и кружков для школьников.
В эффективность такого подхода верил Николай Николаевич Константинов, создавший в нашей стране систему математических школ и классов, в которой выросли десятки тысяч и математиков и не математиков.
Мне представляется особенно важным продолжить данную традицию вместе со студентами мехмата. Это — очень существенно для нашей работы в курсе “Введение в математическую логику и теорию алгоритмов”. На лекциях мы будем обсуждать условия задач и подходы к их решению. Необходимые определения и условия задач Вы можете найти на сайте в интернете, адрес мы вам предоставим.
Там же есть и подсказки и решения задач, но как вы уже поняли, намного лучше пытаться решать задачи самим. У вас будет возможность рассказывать свои решения преподавателям курса. Детали процесса вы обсудите на ближайшем занятии. Среди задач есть совсем простые – “на понимание”, они выделены значком **У** – упражнение. Значком **Д** выделены дополнительные задачи. Мы не ожидаем, что вы их решите, но попытки решения и обсуждение этих попыток могут оказаться полезными.

Еще одно общее замечание, относящееся к изложению в курсе. Использование специальных математических символов в математических текстах является одним из великих достижений (изобретений) математики, в частности, это существенная часть алгебры. Естественно, мы эти символы используем автоматически, например, когда говорим “из всякого действительного числа можно извлечь квадратный корень” (ложное высказывание), то немедленно появляется желание сказать “из всякого действительного числа x можно извлечь квадратный корень”. В курсе сделана попытка вводить те или иные символы только если они нужны и действительно приводят к прояснению или упрощению текста. Неожиданным для авторов образом оказалось, что количество употреблений символов при таком подходе оказалось очень небольшим, а тексты упростились и сократились. При этом мы понимаем, что для чтения и понимания текста читатель (студент) может привлекать символы, чтобы обозначать встречающиеся объекты и операции. Разумеется, у преподавателей против этого нет никаких возражений и мы будем рады обсуждать решения задач, где используется произвольная понятная автору решения и объясняемая им символика.

Еще одно замечание. В курсе есть понятия (центральное из них, конечно, это истинность высказывания в структуре), которые используются по ходу дела много раз. Нам кажется полезным напоминать определения по ходу дела, поэтому не удивляйтесь, если определения будут повторяться.

1 Наивная теория множеств

Основными видами математической деятельности являются: вычисление, доказательство, определение. Математическая логика изучает математическую деятельность математическими средствами.
Основными понятиями будем считать множество и одноместное отношение «быть элементом множества». Наше изложение будет использовать то, что используется в большинстве математических курсов — "Наивную теорию множеств". Мы обсудим вопрос о формализации теории множеств (и тем самым — большей части математики) в одной из последующих лекций. Там будет определена Аксиоматическая теория множеств.
Следующие определения и термины, в основном, известны вам из других курсов.

Задача 1. У Старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков — это один или тот же человек или (возможно) разные?

Подсказка. Совпадают ли множества математиков среди шахматистов и шахматистов среди математиков?

Задача 2. У Лучший математик среди шахматистов и лучший шахматист среди математиков — это один или тот же человек или (возможно) разные?

Подсказка. Правда ли, что сравнение происходит по одному и тому же признаку?

Задача 3. Каждый десятый математик — шахматист, а каждый шестой шахматист — математик. Кого больше — математиков или шахматистов — и во сколько раз?

Подсказка. Как выразить количества математиков и шахматистов через количество элементов в пересечении?

Определение 1. *Цепочкой (или набором)* элементов множества будем называть конечную последовательность элементов этого множества. (Понятие конечной последовательности можно более формально описать в аксиоматической теории множеств, но мы пользуемся интуитивно ясным понятием отображения конечного отрезка натурального ряда в какое-то множество.)
Набор будем обозначать $\langle a, b, c, d, ...\rangle$. Будем говорить, что два набора равны, если они имеют одинаковую длину и в них на одинаковых местах стоят одинаковые элементы.

Определение 2. *Декартовым (прямым) произведением* множеств A и B будем называть множество наборов длины два (упорядоченных пар) $\{\langle a, b\rangle | a \in A, b \in B\}$. *Двухместным* (другими словами — бинарным) *отношением* будем называть подмножество прямого произведения двух множеств. Аналогично определяется *одноместное* и *n-местное отношение*, n — натуральное. Будем считать, что логические константы И и Л также являются отношениями — *нульместными*.

Поскольку мы уже определили отношение, как множество пар, то свойство «находиться в данном отношении» для нас — это свойство «принадлежать этому отношению». Иногда «отношение» и «свойство» считаются синонимами.
Двухместным *отношением на множестве* будем называть подмножество прямого произведения двух копий данного множества. Бинарные отношения на множестве изображаются в виде ориентированных графов. В дальнейшем, если не оговорено противное, графы — ориентированные.
Имя двухместного отношения часто записывается между элементами пары. Запись aRb означает, что элементы (с именами) a и b находятся в отношении (с именем) R.

Задача 4. У Сформулируйте определение *взаимно-однозначного соответствия (изоморфизма)* между двумя множествами.

Подсказка. Попробуйте изобразить графически взаимно-однозначное соответствие для конечных множеств.

Определение 3. Множество будем называть *счётным*, если оно изоморфно натуральному ряду. (Позднее мы дадим определение натурального ряда в нашей наивной теории множеств.)

Иногда счетными множествами считают также и конечные — изоморфные начальному отрезку натурального ряда.

Задача 5. Счётно ли множество всех последовательностей нулей и единиц?

Подсказка. Предположим, что взаимно-однозначное соответствие установлено. Можно ли найти новую последовательность, которая не участвует в установленном соответствии?

Определение 4. Будем называть отношение R на множестве X *рефлексивным*, если для любого $x \in X$ выполнено xRx.

Определение 5. Будем называть отношение R на множестве X *симметричным*, если для любых $x, y \in X$ из xRy следует yRx.

Симметричные отношения изображаются неориентированными графами.

Определение 6. Будем называть отношение R на множестве X *антисимметричным*, если для любых $x, y \in X$ из xRy и yRx следует $y = x$.

Определение 7. Будем называть отношение R на множестве X *транзитивным*, если для любых $x, y, z \in X$ из xRy и yRz следует xRz.

Определение 8. Будем называть отношение R на непустом множестве X отношением *эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Задача 6. Точно сформулируйте (дав необходимые определения) и докажите утверждение о том, что задание на множестве отношения эквивалентности равносильно заданию его разбиения на классы эквивалентности.

Подсказка. Нужно придумать, или вспомнить, что такое разбиение множества на подмножества.
Если задано разбиение множества, можно определить отношение эквивалентности как принадлежность одному и тому же подмножеству из разбиения. Если задано отношение эквивалентности, нужно определить, что такое элемент (класс) разбиения и доказать, что классы не пересекаются и для каждого элемента существует класс, в который он попадает.

Определение 9. Будем называть отношение R на множестве X отношением *частичного (нестрогого) порядка*, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.
Будем говорить, что элементы x, y этого множества *сравнимы*, если выполнено xRy или yRx.
Назовем отношение R "меньше или равно". Будем называть элемент x множества $Y \subseteq X$ *наименьшим в* Y, если для любого y из Y выполнено xRy.

Задача 7. У Придумайте определение наибольшего элемента подмножества.

Подсказка. Сравните данный элемент со всеми элементами множества. В каком случае он будет наибольшим?

Определение 10. Будем называть отношение R на множестве X отношением *линейного порядка*, если оно является отношением частичного порядка и любые два элементы сравнимы.

Определение 11. Линейно упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, или *фундированным*, если всякое его непустое подмножество имеет наименьший элемент. Соответствующий порядок называется *полным.*

В различных математических ситуациях для создания определений, теорем, примеров бывает полезным наглядное представление математических объектов. В одной области математики такое представление используется постоянно — в теории графов.

Определение 12. *Графом* называется любая пара из множества и двухместного отношения на нем. Наглядно граф представляется так: элементы множества называются вершинами и изображаются точками, пара элементов, находящихся в отношении, называется ребром, ребро изображается кривой со стрелкой, идущей от первого элемента пары ко второму.

Определение 13. *Путем* в графе $\langle S, R\rangle$ называется последовательность элементов множества S такая, что между каждым, кроме последнего, элементом и следующим имеется отношение R. Если последовательность конечная, мы говорим, что это путь из первого элемента в последний.

Определение 14. *Дерево* — это граф, в котором в одну вершину, называемую *корнем*, не ведет ребер, а в любую другую ведет ровно одно ребро и в любую вершину из корня ведет путь. Вершина, куда ведет ребро из данной, называется ее *потомком.*

Задача 8. (**Лемма Кёнига**) Правда ли, что в бесконечном дереве, где из каждой вершины выходит конечное число ребер, обязательно есть бесконечный (ориентированный) путь?

Подсказка. Перестанет ли дерево быть бесконечным при удалении конечной части?

Определение 15. Бинарное отношение $F \subset A \times B$ называется *функцией* из A в B, если оно не содержит пар с одинаковыми первыми членами и разными вторыми. Другими словами, для каждого $a \in A$ существует не более одного $b \in B$, для которого $\langle a, b \rangle \in F$.

Слова «отображение» и «функция» будем употреблять как синонимы. Множество всех первых элементов пар, образующих функцию, называется областью определения функции, множество вторых элементов этих пар называется областью (или множеством) значений функции. Исторически со словом функция связывали некую интуитивно понимаемую “зависимость”, “правило получения результата из аргумента”, “машину, перерабатывающую вход в выход”. В рамках этих представлений то, что мы называем функцией, называли “графиком функции”.

Определение 16. Функция $f : A \longrightarrow B$ называется *инъективной*, или *инъекцией*, или *вложением*, если она переводит разные элементы в разные, то есть если $f(a_1) \neq f(a_2)$ при неравных a_1 и a_2.

Определение 17. Функция $f : A \longrightarrow B$ называется *сюръективной*, или *сюръекцией*, или *наложением*, если множество её значений есть всё B. (Иногда такие функции называют отображениями на B).

Определение 18. Функция $f : A \longrightarrow B$ называется *биекцией*, или *взаимно однозначным соответствием*, если она одновременно является инъекцией и сюръекцией, причем область ее определения есть A.

Задача 9. (**Теорема Кантора – Бернштейна**) Если существует вложение A в B и вложение B в A, то существует биекция между A и B.

Подсказка. Попробуйте наглядно представить заданные вложения каждого из множеств в другое. Сами множества изобразим в виде двух параллельных отрезков.
Левый отрезок (множество A) покрасим в синий цвет, а правый — в зеленый. Два отображения, как обычно, изобразим в виде стрелок, идущих от синих точек к зеленым и

от зеленых к синим — см. рисунок.

Будем пытаться строить требуемое взаимно-однозначное соответствие также в виде множества стрелок. Его можно строить только из имеющихся стрелок, другого «строительного материала» у нас нет. Единственное, что мы можем делать по ходу — это некоторые стрелки заменять двухсторонними.

Начнем с того, что попробуем отнести к строящемуся соответствию все имеющиеся стрелки, идущие слева направо: из синих точек в зеленые. Конечно, мы не достигнем результата, поскольку в некоторые зеленые точки ничего не идет. Очевидный выход: стрелки, идущие в зеленые точки, сделать двухсторонними и отнести к результату построения. Одновременно, нам придется лишиться стрелок, которые шли из тех синих точек, откуда теперь идут обращенные стрелки. Таким образом, мы получаем новые зеленые точки, куда не идут стрелки.

Задача 10. Д Правда ли, что любые два множества сравнимы по мощности, то есть, что одно из них может быть вложено в другое?

Подсказка. Ситуация здесь довольно интересная. Возможно, Вы решите (может быть, даже быстро) эту задачу, если вы знакомы с тем, что называется теоремой Цермело, или принципом трансфинитной индукции, или аксиомой выбора. Возможно, вы ее просто решите, исходя из Ваших представлений о множествах и доказательствах. В этом случае, Вы, видимо, неявно использовали что-то из предыдущего. Наконец, задача могла не получиться. Со всеми этими вопросами мы разберемся, когда построим начало теории вполне упорядоченных множеств и обсудим аксиому выбора на второй лекции.

2 Вполне упорядоченные множества

Определение 19. (переформулировка уже данного определения) Множество с бинарным отношением $<$ называется *линейно упорядоченным*, если отношение $<$ транзитивно и антисимметрично, а также для любых x, y выполнено ровно одно из отношений: $x < y$, $x = y$, $y < x$.

Определение 20. (повторение) Множество называется *вполне упорядоченным*, сокращенно *вум*, если оно линейно упорядочено и всякое его непустое подмножество имеет наименьший элемент. Соответствующий порядок называется *полным*.

Наше определение не исключает случая пустого множества. В некоторых случаях удобно считать пустое множество вполне упорядоченным, так мы обычно и будем делать.

Задача 11. У Правда ли, что любое вполне упорядоченное множество имеет а) наименьший б) наибольший элемент?

Подсказка. Является ли множество своим непустым подмножеством?

Определение 21. (*Натуральные числа по фон Нейману*) Определим 0 как пустое множество. Единицей будем называть множество, состоящее из пустого множества. $2 = \{0, 1\}, 3 = \{0, 1, 2\}, ..., n = \{0, 1, ..., n - 1\}$. $\omega = \{0, 1, 2, ...\}$.

Задача 12. Как определить порядок на натуральных числах по фон Нейману, используя данное определение числа?

Подсказка. Как можно сравнивать множества?

Задача 13. Правда ли, что ω и любое подмножество ω — вполне упорядоченные множества?

Подсказка. Что нужно для того, чтобы порядок был полным?

Задача 14. Как можно определить *сумму* двух вполне упорядоченных множеств, чтобы она была вполне упорядоченным множеством?

Подсказка. Как проще всего сравнить элементы из разных множеств?

Задача 15. Как определить *следующий элемент* во вполне упорядоченном множестве?

Подсказка. Множество всех элементов, больших данного — это пример подмножества.

Задача 16. Правда ли, что любой элемент вполне упорядоченного множества имеет а) следующий б) *предыдущий* элемент?

Подсказка. Вспомните определение следующего и предыдущего элементов и примеры вум, которые у нас были.

Определение 22. Будем называть элемент вполне упорядоченного множества *предельным*, если он не равен нулю и не имеет предыдущего.

Задача 17. Правда ли, что всякий элемент вполне упорядоченного множества является несколько раз следующим или за предельным, или за нулем?

Подсказка. Что следует из предположения о существовании элементов, для которых условие не выполнено?

Определение 23. Подмножество вполне упорядоченного множества называется его *начальным отрезком*, если оно вместе с каждым элементом содержит все элементы, меньшие его.

Задача 18. Правда ли, что объединение любого множества начальных отрезков — начальный отрезок?

Подсказка. Рассмотрите произвольный элемент из объединения. Правда ли, что все элементы, меньшие данного, тоже принадлежат объединению?

Задача 19. Доказательство по индукции
Пусть утверждение A, зависит от натурального числа n и выполнено какое-то из условий (1) – (3):

(1)
A выполнено для n=0.
Если A верно для n, то A верно для $n+1$.

ИЛИ (2)
Из того, что A верно для всех чисел, меньших, чем n, следует, что A верно и для n. (Для n=0 – частный случай.)

ИЛИ (3):
Из того, что A НЕ верно для некоторого n, следует, что A не верно и для какого-то меньшего числа.

Тогда A верно для всех натуральных чисел.

Доказательство по трансфинитной индукции

Пусть утверждение A, зависит от элемента b вполне упорядоченного множества B и выполнено какое-то из условий (1) – (3):

(2)
Если A верно для всех элементов множества B, меньших, чем b, то A верно для b. (Для b=0 – частный случай.)

ИЛИ (3):

Из того, что А НЕ верно для некоторого b, следует, что А не верно и для какого-то меньшего элемента множества B.

ИЛИ (1)
А верно для наименьшего элемента множества B.
Если А верно для элемента b, то А верно для элемента $b + 1$.
Если А верно для всех меньших, чем предельный элемент b, то А верно для b.

Тогда А верно для всех элементов множества B.

Подсказка. Рассмотрите множество элементов, для которых А не верно. Воспользуйтесь вполне упорядоченностью. Начинайте проверку с (3).

Задача 20. Определение по индукции

Определение по индукции функции F.

Пусть значение функции $F(n)$ однозначно определяется значениями F для всех чисел, меньших n. (Для 0 – частный случай.)
Тогда F единственна и определена для всех чисел.

Подсказка. Рассмотрите множество натуральных чисел, для которых заключение задачи не выполнено.

Продолжение условия задачи.
Определение по трансфинитной индукции

Определение по индукции функции F на вум.

Пусть $F(b)$ однозначно определяется значениями F для всех элементов, меньших b. (Для 0 – частный случай.)
Более формально, пусть задано множество М и отображение Ф, принимающее значения в М, областью определения которого являются все функции из всех начальных отрезков чум Ч в множество М.
Определим $F(b)$ как Ф на отрезке элементов, меньших b.
Тогда, F определена для всех элементов вум.

Подсказка. Что нам мешает повторить рассуждение для натуральных чисел?

Определение 24. *Вложение вум A в вум B* – это взаимно однозначное соответствие между A и начальным отрезком в B, переводящее порядок на A в порядок на B.

Упражнение: запишите подробно, что значит “переводящее порядок”.

Решение. Если $a < b$, то $f(a) < f(b)$.

Определение 25. (Объединение отображений) Отображение — это множество пар. *Объединение отображений* — это объединение множеств.

Задача 21. У: Запишите подробно, когда объединение отображений из множества A в множество B является отображением.

Подсказка. Когда в объединении нет пар с одинаковыми первыми элементами и разными вторыми.

Определение 26. Будем называть отображение f продолжением отображения g, если отображение g (как множество пар) является подмножеством отображения f. Мы уже упоминали выше, что то, что мы называем функцией, иногда называли графиком функции; таким образом, одна функция продолжает другую, если один график как бы “продолжает” другой, то есть содержит этот другой.

Задача 22. Докажите, что если одно вум вкладывается в другое, то это вложение единственно.

Подсказка. Правда ли, что наименьший элемент при вложении будет переходить в наименьший?

Задача 23. Покажите, что вум не вкладывается в собственный начальный отрезок.

Подсказка. Используйте предыдущую задачу.

Задача 24. Теорема о сравнимости вум. Доказать, что для любых двух вум какое-то из них вкладывается в другое.

Доказательство этой теоремы получится как результат нескольких лемм — задач, которые идут ниже, в которых идет речь о двух вум A и B . В этих леммах мы рассматриваем всевозможные вложения начальных отрезков A в B.

Задача 25. Если один начальный отрезок множества A продолжает другой, то их вложения в множество B тоже обязательно будут продолжать друг друга.

Подсказка. Вложение большого отрезка определяет некоторое вложение меньшего.

Задача 26. 1. Будет ли объединение всех вложений начальных отрезков A в B вложением?
2. Может ли получиться так, что прообраз — не все A и при этом образ — не все B?

Подсказка. Покажите, что объединение вложений будет вложением какого-то начального отрезка.

Задача, которую мы сейчас решили, завершает доказательство теоремы о сравнимости вум.

Определение 27. Пусть A — множество. Отображение из 2^A в A, для которого образ каждого непустого подмножества A принадлежит этому подмножеству, называется *функцией выбора.*

Задача 27. На всяком вум можно определить функцию выбора.

Подсказка. Можно ли считать наименьший элемент результатом применения функции выбора?

Решение. Во всяком подмножестве вум есть наименьший элемент, отображение подмножества в него является функцией выбора.

Задача 28. Теорема Цермело. Если для множества существует функция выбора, то оно может быть вполне упорядочено.

Доказательство этой теоремы получится как результат нескольких лемм — задач, которые идут ниже.
Идея: если на части множества определен полный порядок, то нужно уметь этот порядок продолжить, хотя бы еще на один новый элемент.
Функция выбора дает нам элемент в подмножестве, как нам получить для продолжения порядка элемент вне подмножества?

Определение 28. Упражнение: Имея функцию выбора, определить *функцию дополнения*, которая сопоставляет подмножеству элемент дополнения к нему.

Определим *функцию дополнения* $G(X)$ на подмножестве A как функцию выбора на дополнении к этому подмножеству. Естественно, на всем A она не определена, а всякому другому подмножеству A она ставит в соответствие элемент A, в этом подмножестве не лежащий.

Будем называть порядок на части X множества A, *управляемым* G, если всякий элемент X есть G от множества всех меньших в этом порядке. В частности, если в X есть наименьший элемент, то множество меньших его пусто и этот элемент есть G от пустого множества. (Мы помним, что этот элемент есть значение функции выбора на всем A.) Можно (хотя и не обязательно) представить, что мы, начина с этого выделенного элемента расширяем порядок и это расширение на каждый «следующий элемент» диктуется нам «управляющей» функцией G, если мы уже сделали бесконечное количество шагов, то можно объединить все уже построенные расширения и добавить еще один элемент, используя ту же функцию G и т. п.

Задача 29. Пусть на множестве A задана функция дополнения. Рассмотрим два упорядоченных подмножества в A, порядки на которых управляются этой функцией. Тогда какое-то одно из этих упорядоченных множеств вложено в другое.

Подсказка. Что можно сказать о наименьших элементах в этих двух упорядоченных множествах? Могут ли они различаться?

Задача 30. Среди построенных порядков есть полный порядок на всем A.

Подсказка. Что если полного порядка нет?

Это завершает доказательство теоремы.

Аксиома выбора. (Axiom of Choice — AC) На всяком множестве существует функция выбора.

Задача 31. У
Если аксиома выбора верна, то на всяком множестве можно задать полный порядок.

Задача 32. Если аксиома выбора верна, то для любых двух множеств одно из них вложимо в другое.

Подсказка. Правда ли, что любое множество можно вполне упорядочить?

Задача 33. Д Теорема (парадокс) Банаха — Тарского
Шар можно разбить на пять частей, передвинув которые можно сложить (без пустот и пересечений) два шара такого же радиуса.

Определение 29. Игра Банаха – Мазура

• Отрезок [0;1]. Два игрока: I и II.
• A — множество выигрыша для I.
• Поочередно в [0;1] игроки выбирают отрезки: следующий вложен в предыдущий; длина отрезков стремится к нулю.
• Первый выигрывает, если в пересечении всех отрезков найдется точка из A.
• В противном случае выигрывает второй.

Аксиома детерминированности. Во всякой игре Банаха – Мазура (т.е. для любого множества выигрыша) один из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задача 34. Д Если аксиома выбора верна, то аксиома детерминированности ложна.

Задача 35. (i)
В просторном купе поезда едут шестеро Мудрецов. Поезд въезжает в туннель, и поскольку окна купе открыты, то копоть от паровоза испачкала лица кое-кого из мудрецов. В купе нет зеркала, поэтому каждый из Мудрецов видит лица других, но не видит

своего. А поскольку они все не только очень умные, но и гордые, то каждый из них считает ниже своего достоинства спрашивать у других, испачкано ли у него лицо.
Все мудрецы знают, что на любой станции можно выйти и умыться, но никто из них не хочет выходить, не зная точно, что у него лицо грязное, чтоб не уронить свое достоинство перед другими. Поэтому станция за станцией никто не выходит.
На одном из перегонов между станциями в купе заглядывает проводник. Он видит, что кое у кого испачканы лица и сообщает, что грязное лицо можно умыть на любой станции.
На третьей станции, на которой остановились после визита проводника, все Мудрецы с грязными лицами (и только они) вышли и умылись.
1. У скольких мудрецов были испачканы лица?
2. Что нового сообщил мудрецам проводник? Напомню, все и так знали, что на станции можно умыться.
(ii)
Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает каждому колпак белого, синего или красного цветов. Все мудрецы видят цвета всех колпаков впереди стоящих мудрецов, а цвет своего и всех стоящих сзади не видят. Раз в минуту один из мудрецов должен выкрикнуть один из трёх цветов (каждый мудрец выкрикивает цвет один раз). После окончания этого процесса король казнит каждого мудреца, выкрикнувшего цвет, отличный от цвета его колпака. Накануне переаттестации все сто членов Совета Мудрецов договорились и придумали, как минимизировать число казненных. Скольким из них гарантированно удастся избежать казни?
(iii)
Счётное множество мудрецов выстроены в натуральный ряд (лицом в сторону возрастания ряда, так что каждый видит перед собой бесконечное число мудрецов). Каждый из мудрецов знает свой номер в последовательности. Каждому мудрецу надета на голову шляпа одного из трёх цветов, и каждому задается вопрос о цвете его шляпы. Всех, кто дает неправильный ответ, казнят. Мудрецы не слышат чужих ответов на заданные им вопросы (и не видят казней неправильно ответивших коллег) и, следовательно, не могут получать никакой новой информации. Могут ли они заранее договориться так, чтобы казнено было лишь конечное число мудрецов?

Подсказка. Попробуйте рассмотреть случай одного мудреца, двух и т. д.