Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Львович Семенов

Заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов
Академик Российской академии наук
и Российской академии образования

Лекция 3

План:

- Имена и значения
- Анализ составных имен
- Структуры и контексты.
- Кванторы и связанные переменные
- Определимость
- Выполнимость и истинность высказываний
- ДНФ, предваренная нормальная форма
- Игровая интерпретация кванторов

Имена и значения

- **Имена** – символы, или цепочки символов
- **Значение имени** – математический или реальный объект
  - Элементы множества, отношения на множестве.
- **Синтаксис** – правила построения имен
- **Семантика** – правила приписывания именам значений
- **Составное имя** – составлено из других имен

Нахождение значения составного имени

Как найти значение составного имени?

- в математике значение составного имени определяется значением составляющих
- Надо найти значения его составляющих

Из чего и **как** составлено имя?

Проблема **анализа**.

- Казнить нельзя помиловать
- Каковы составляющие?
    - Казнить нельзя помиловать
    - Казнить нельзя помиловать

Нахождение значения составного имени

3. Как найти значение составного имени?

- Готлоб Фреге – основной создатель языков математической логики – двумерная запись
- Деревья, где потомки – составляющие
- Линейная запись использует скобки
    - (А и Б) или (С),
    - (А) и (Б или С)

– два разных имени. Они могут иметь разные значения.

Готлоб Фреге
1848 - 1925

Язык и структура
Имена и значения

Язык включает:

- *Множество* ***имен объектов.***
- *Множество* ***имен отношений***, с каждым именем сопоставлена его «*местность*», *валентность* – количество аргументов.
- Имена объектов и отношений составляют ***сигнатуру*** языка.
- К ним добавляются переменные, логические символы, запятые, скобки.

Структура данной сигнатуры:

- Множество U (***универсум***) и ***значения*** имен сигнатуры:
  - элементы универсума – значения имен объектов
  - отношения соответствующей местности – значения имен отношений

  Как мы увидим дальше, значениями формул также будут отношения

  Отображение: Значение задает семантику языка

Замечание о функциях, операциях

3. Как, используя отношения, обойтись без функций?

Можно было бы обойтись и без имен объектов.

Язык и структура
Имена и значения

Универсум – целые числа.

5 < 3

имя – цифра 3,
значение имени -- целое
число – тройка

Значение имени – двухместное
отношение «меньше» для целых
чисел

имя – цифра 5,
значение имени --
целое число –
пятерка

Значение формулы - Л

Язык: переменные, термы, атомные формулы

Язык, синтаксис

- Фиксирована последовательность ***переменных***: x_1 , x_2 ,… и т. д.
- Переменная – синтаксический объект

Фиксирована сигнатура (имена объектов и отношений)

- ***Термы***: имена объектов и переменные
- Язык. синтаксис:
  - **Атомные формулы**: $A(t_1 , t_2 ,\ldots t_n)$, где A – имя n-местного отношения, t_1, t_2,… t_n – термы

Язык: формулы

Язык:

- Логические связки: ¬ -- отрицание, ∧ -- конъюнкция (и), ∨ -- дизъюнкция (или), → -- импликация (если.., то…), ≡ -- эквивалентность (титт)
- Кванторы ∀ ∃
- Скобки (однозначность анализа формулы)

3. Сформулировать точно синтаксис: индуктивные ***правила построения*** формул = ***индуктивное определение*** того, что такое формула.
При этом надо, например используя скобки, обеспечить и доказать однозначность анализа.

Индуктивное определение выглядит так:

- Атомные формулы – это формулы.
- Если то-то и то-то формулы (могут быть и еще условия), то... формула.

При этом будем стараться добиться, чтобы по формуле однозначно определялось как и из чего она построена -- это и есть ***однозначность анализа***.

A ∧ B ∨ C – что это: (A и B) илиC или A и (B илиC)? Будем как-то использовать скобки.

Язык: формулы. Синтаксис

Индуктивное определение формулы:

Все атомный формулы -- формулы.

Пусть A -- формула, x -- переменная, тогда:

- $\neg (A)$
- $\forall x\ (A)$
- $\exists x\ (A)$

-- формулы

- Пусть A и B -- формулы, тогда:
- $(A) \wedge (B)$
- $(A) \vee (B)$
- $(A) \to (B)$
- $(A) \equiv (B)$

-- формулы

Теорема об однозначности анализа формул.

Любая формула единственным образом может быть представлена в виде, задаваемом указанным индуктивным определением.

Существует алгоритм, который такое представление строит.

З. Подробно сформулировать и доказать теорему, указать алгоритм.

Язык и структура
Атомные формулы. Семантика

- Фиксирована структура
- ***Термы***: имена объектов и переменные
- ***Контекст*** структуры – синтаксический объект:
  - Произвольная бесконечная последовательность a_1 , a_2 ,… имен элементов универсума; имена не только из сигнатуры!
  - Контекст «задает значения всех переменных сразу»
  - ***Значение терма в контексте*** – элемент универсума, именно:
    - ***Значение*** имени объекта – этот объект. ***Значение*** x_2 – это значение a_2 и т.д.,
  - **Значение атомной формулы**: $A(t_1 , t_2 ,\dots t_n)$, где A – имя n-местного отношения, t_1, t_2,… t_n – термы -- это значение A на значениях аргументов в скобках – И или Л
- Семантика:
  - ***Значение атомной формулы в контексте заданной структуры***: И или Л

Язык: формулы. Семантика

Индуктивное определение формулы:

Все атомный формулы -- формулы.

Пусть A – ..., x -- .., тогда:

- ¬ (A)
- ∀x (A)
- ∃x (A)

-- формулы

- Пусть A и B -- формулы, тогда:
- (A) ∧ (B)
- (A) ∨ (B)
- (A) → (B)
- (A) ≡ (B)

-- формулы

Определение значения формулы в данной структуре и контексте α = a_1 , a_2 ,…

Для атомных формул – было определено.

Для отрицания очевидно.

Для квантора по переменной x_i, рассмотрим все контексты, совпадающие с **α** всюду, кроме *i*-ого места. Если среди них есть такой, для которого A – истинна, то – ∃x (A) истинна, если для всех таких контекстов A – И, то ∀x (A) - И.

Для логических связок, в соответствии с таблицами истинности.

- (A) ∧ (B) – оба истинны
- (A) ∨ (B) – хотя бы одно истинно
- (A) → (B) – ложно, только, если A -- И, а B -- Л
- (A) ≡ (B) – значения совпадают

3. Зачем нужна однозначность анализа?

Логика отношений
Связанные и свободные переменные

- Переменная суммирования *k* в выражении

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

связанная, нельзя считать, что ее значение в этом выражении есть 3, а в выражении x^k – можно, здесь *k* – свободная.

- Аналогично, *x* в выражении $\forall x\ (x^2>0)$

связанная, нельзя считать, что ее значение в этом выражении есть 3, а в выражении $x^2>0$ – можно, здесь *x* – *свободная*.

У. Дать определение *множества свободных переменных формулы* индукцией по построению.

У. Дать определение *свободного вхождения переменной в формулу*.

Значения формулы в данной структуре является отображение из множества всех контекстов в {И, Л}, то есть – «бесконечноместное» отношение.

Значение зависит только от свободных переменных.

Логика отношений
Определимые в структуре отношения.

- Формула ***определяет отношение*** на U^n, где n – больше номеров всех свободных переменных формулы.
- О. ***Высказывание*** – формула без свободных переменных
- Удобно использовать 0-местные имена отношений.
  Их значения в структуре не зависят от контекста.
- Высказывание ***истинно***, если его значение И в любой структуре данной сигнатуры.
- Высказывание ***выполнимо***, если существует структура данной сигнатуры, которой оно И.
- ***Эквивалентность*** *формул* – совпадение их значений в любой структуре и любом контексте.
  Символ для эквивалентности: ⇔. Символ для следствия…
- **З.** Любая бескванторная формула эквивиалентна
  дизъюнкции конъюнкций атомных формул и их отрицаний, т. е. –
  дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ). (Курс «Дискретные функции»)

Доказательство: для формул, истинных ровно на одном наборе и т.д.

Эквивалентность формул
Работа с кванторами

- В работе математика часто происходит преобразование формулы в эквивалентную, а также получение следствий (дать определение).
- На семинарах это будет рассмотрено подробнее. Примеры:
- $(\neg\ \forall x\ \Phi) \Leftrightarrow (\exists x\ (\neg\Phi))$
- $(\mathbf{Q}x\ \Phi)\ \tau\ \Psi \Leftrightarrow \mathbf{Q}x\ (\Phi\ \tau\ \Psi)$,
  где $\tau \in \{\wedge, \vee\}$, $\mathbf{Q} \in \{\forall, \exists\}$,
  в Ψ нет свободных вхождений x

Предваренная нормальная форма

Кванторы – основная сложность в работе с формулами логики отношений

Бывает удобно преобразовать формулу в эквивалентную, где все кванторы – в начале – предварённую нормальную форму.

3. Сформулировать и доказать теорему о предварённой нормальной форме.

Игровая семантика

Фиксируем структуру и формулу в предваренной нормальной форме.

Игра: Математик выбирает значение для переменной квантора существования.

Природа выбирает значение для квантора всеобщности.

Выигрыш Математика – истинность формулы.

Пример: утверждение о непрерывности функции на всей прямой.

3. Сформулировать и доказать теорему об игровой семантике для логики отношений.

Лекция 3

Что было:

- Имена и значения
- Анализ составных имен
- Структуры и контексты.
- Кванторы и связанные переменные
- Определимость
- Выполнимость и истинность высказываний
- ДНФ, предваренная нормальная форма
- Игровая интерпретация кванторов