Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Львович Семенов

Заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов
Академик Российской академии наук
и Российской академии образования

Лекция 9. Полные теории

План:

- Полные теории
- Теория плотного линейного порядка без наибольшего и наименьшего
- Теория дискретного порядка с минимальным элементом
- Полнота и не ω-категоричность
    - Нестандартные модели, галактики
    - Сверхбольшие теории и структуры

Полные теории. Определение

Теория Γ – *полна*, если

Γ ⊨ Φ или Γ ⊨ ¬Φ для любого высказывания Φ.

У. Почему любую выполнимую теорию можно расширить до полной?

У. Th_{M} – полна для любой структуры *M*.

У. Теория полна тогда и только тогда, когда две любые модели теории эквивалентны.

З.

- Являются ли теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, $\Gamma_{\mathbb{N}}$ полными?
- Существуют ли у них неизоморфные счетные модели?

перерыв

Теории и модели

Естественная идея: написать систему аксиом, определяющую ровно одну структуру, с точностью до изоморфизма.

У. Возможно ли это?

Теорема Лёвенгейма – Сколема показывает, что нет: у выполнимой теории с бесконечной моделью есть модели любой мощности.

З. Теории $Г_{\mathbb{Q}}$, $Г_{\mathbb{N}}$ - попытки «полно» описать $_{\mathbb{Q}, \mathbb{N}}$, не теории $_{\mathbb{Q}, \mathbb{N}}$

- Являются ли теории $Г_{\mathbb{Q}}$, $Г_{\mathbb{N}}$ полными?
- Существуют ли у них неизоморфные счетные модели?

ω-категоричные теории

О. ω-категоричной называется теория, все счетные модели которой изоморфны.

Аналогично – для любой мощности вместо ω.

З. Доказать ω-категоричность плотного порядка без наибольшего и наименьшего ($\Gamma_{\mathbb{Q}}$).

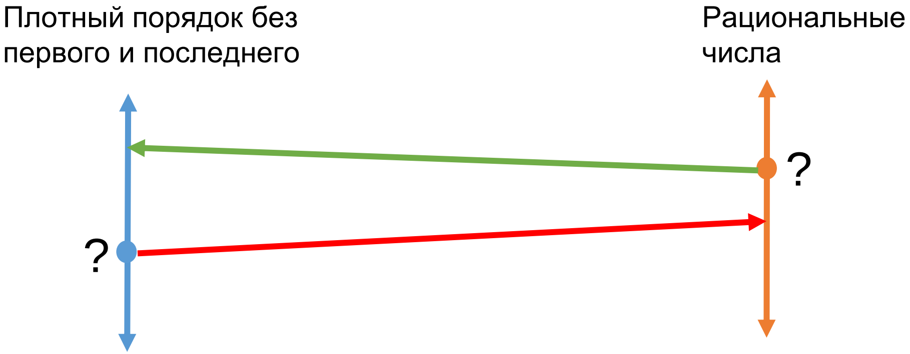
Большая идея: челнок

(ср. Теорему Кантора – Бернштейна.)

ω-категоричная теория

З. Доказать ω-категоричность плотного порядка без наибольшего и наименьшего.

Д. – Начнем действовать: устанавливать изоморфизм, пользуясь $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.



Большая идея: челнок (ср. Теорему Кантора – Бернштейна.)

У. Королларий. Что будет, если у нас любой счетный порядок? – вложение

Признак Лося – Воота

У. Признак Лося – Воота. Выполнимая ω-категоричная теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей, полна.

У. Выполнимая теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей и категоричная в некоторой бесконечной мощности, полна.

Теория Γ_N. Дискретный линейный порядок с наименьшим элементом

В сигнатуре имена для отношения < и для элемента – (0)

- **Линейный порядок**
- **Наибольшего нет, наименьший – 0**
- **У каждого есть следующий, у каждого, кроме нуля, есть предыдущий**

Стандартная модель –

Натуральные числа с порядком $\mathbb{N}_<$.

3. Бывают ли какие-то еще?

Или теория $\Gamma_{\mathbb{N}}$ ω-категорична?

Дискретный порядок с наименьшим

Не стандартные модели

M – произвольная модель теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$, a, $b \in M$.
a и *b* *близки* –
множество элементов между ними конечно. Близость – эквивалентность.

- Классы эквивалентности – *галактики.*

Класс галактики a – $\underline{a}$.

У. Как устроена галактика $\underline{0}$? Как устроены все прочие галактики?

- Галактика или $\underline{0}$, или изоморфна целым числам.
- Порядок на галактиках: $\underline{a} < \underline{b}$ – $\underline{a} \neq \underline{b}$ и $a < b$.

У. Корректно ли определен порядок? Будет ли порядок на галактиках линейным? Есть ли среди галактик наименьшая?

Сверхбольшая теория и структура

$\mathbb{N}^{+} = \langle \omega, \{0, 1, 2, ..., <, +\}, \mathbf{Зн}_0 \rangle$.

$+ (n_1, n_2, n_3) \Leftrightarrow n_1 + n_2 = n_3$

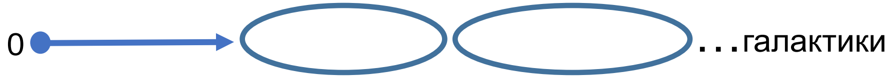
$a + b + c = d \Rightarrow (\exists u\, (+ (a, b, u) \wedge +(u, c, d)))$

Теория $Th_{\mathbb{N}+} \cup \{c > i \mid i \in \omega\}$ выполнима.

У. Как записать: $x>3$, $c>5$? c - *бесконечно большой* элемент.

«Сверхбольшая теория»

$\mathbb{N}^{*}$ – счетная модель этой теории – «Сверхбольшая структура»



$\mathbb{N}^{*}_{<}$ получена из $\mathbb{N}^{*}$ удалением + и имен всех элементов кроме 0. «Большая структура»

У. $\mathbb{N}^{*}_{<}$ – модель теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$.

У. Может ли структура $\mathbb{N}^{*}_{<}$ оказаться изоморфной $\mathbb{N}_{<}$?

Устройство сверхбольшой структуры

У. Какой порядок образуют **галактики** $\mathbb{N}^*_<$?
(каждая галактика – один элемент порядка)

Чему этот порядок изоморфен?

- Наибольший?
    - $c + c$
- Ноль
- Дискретный?
- Наименьший больший нуля?
    - Взять половину c?
- Плотный?
    - Как между двумя рациональными числами найти третье?
    - Похожий на неотрицательные рациональные числа?

Устройство сверхбольшой структуры

О. *Автоморфизм* структуры – изоморфизм на себя

У. Автоморфизм сохраняет значение формул, в том числе – высказываний.

У. Есть ли автоморфизмы у $\mathbb{N}_<$? А у $\mathbb{N}^*_<$?

Пример автоморфизма (-1) в одной из галактик.

О. Подструктура называется правильной, если она содержит только галактики целиком.

У. Всякая модель $\Gamma_{\mathbb{N}}$ изоморфна правильной подструктуре в $\mathbb{N}^*_<$.

Д. Королларий королларии о вложении счетных линейных порядков.

Вложимость в сверхбольшую структуру

Полная не ω-категоричная теория

У. Структура $\mathbb{N}^*_<$ является элементарным расширением любой своей правильной подструктуры.

Д. Теорема Тарского – Воота.
Возьмем любые подструктуру и формулу $\Phi(a, b)$,
где вектор a взят в подструктуре и b – наименьший,
для которого $\Phi(a, b)$ истинно.
Если b не лежит в подструктуре, применим автоморфизм, уменьшающий b на единицу. Противоречие.

У. Всякая модель $\Gamma_{\mathbb{N}}$ элементарно экв. $\mathbb{N}^*_<$.
Мы нашли полную теорию с неизоморфными счетными моделями.
– Решение поставленной задачи.

Обсуждение доказательства

Зачем нам понадобилась теория чего-то:

$\mathrm{Th}_{\mathbb{N}+}$ ($\cup$ $\{c > i \mid i \in \omega\}$)?

- Возьмем модель теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$ и формулу $\Phi(b)$
- Почему найдется минимальный элемент b, для которого $\Phi(b)$ – истинна?
- То есть, почему в любой модели этой теории выполнена формула…?
- Бывает ли не так?

Поэтому мы берем <u>**теорию структуры**</u>, где в любом подмножестве (в том числе, заданном формулой) есть минимальный. (Можно было взять класс таких структур.) Мы взяли структуру $\mathbb{N}_+$. Для данной формулы – есть минимальный.

Обсуждение доказательства

Зачем нам понадобился $+$ и ($\cup \{c > i \mid i \in \omega\}$)?

Мы пытаемся доказать, что во всех моделях $\Gamma_{\mathbb{N}}$ выполнено одно и то же.

Для этого мы строим теорию со сложением + и бесконечно большим c.

Показываем, что с точки зрения $<$, у нее есть только одна модель.

Она является моделью $\Gamma_{\mathbb{N}}$ и в нее элементарно вкладываются все остальные (счетные) модели $\Gamma_{\mathbb{N}}$.

Элиминация кванторов

3. Построить процедуру элиминации кванторов для структур <Q,+,1>; <N,<, +n>

Атомные формулы могут использовать операции.

Можно разрешать все уравнения и неравенства относительно одной неизвестной.

В качестве значений неизвестной можно рассмотреть выражения (термы) от других.

Лекция 9. Полные теории

Было:

- Полные теории
- Теория плотного линейного порядка без наибольшего и наименьшего
- Теория дискретного порядка с минимальным элементом
- Полнота и не ω-категоричность
    - Нестандартные модели, галактики
    - Сверхбольшие теории и структуры