SkillFactory

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Львович Семенов

Заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов
Академик Российской академии наук
и Российской академии образования

Лекция 8. Элементарные расширения

План:

- Элементарные расширения
- Критерий Тарского – Воота для элементарного расширения
- Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарной подструктуре
- Теорема Геделя – Мальцева о компактности
- Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарном расширении
- Полные теории

В лекциях

Принятые сокращения

У. – упражнение

З. – задача

О. – определение, обозначение

Т. – теорема

Д. – доказательство

Элементарное расширение (было)

$M = \langle D, \Sigma, \mathbf{Зн} \rangle$, $M_1 = \langle D_1, \Sigma, \mathbf{Зн}_1 \rangle$,

О. *Подструктура:* сигнатура та же,

- универсум – подмножество и
- значения имен элементов лежат в под-универсуме,
- значения имен отношений совпадают на под-универсуме.

О. *M – элементарное расширение M_1*, (*M_1 – элементарная подструктура M*)

- *M_1 – подструктура M*
- Значение любой формулы в обеих структурах совпадают на элементах подструктуры:
  $M \vDash \Phi(\boldsymbol{a}) \;\Leftrightarrow\; M_1 \vDash \Phi(\boldsymbol{a})$ для любых наборов $\boldsymbol{a} \in D_1^*$.

У. M эквивалентна M_1.

З. Бывают ли такие структуры M и M_1, что
(1) M_1 – подструктура M, и M_1 эквивалентна M, но
(2) M_1 не является элементарной подструктурой M?

(то есть – верные высказывания одни и те же, но кванторы по элементам большей структуры меняют значение не замкнутой формулы)

Критерий Тарского – Воота

Пусть $M_1 = \langle D_1, \Sigma, \mathbf{Зн}_1 \rangle$ – подструктура структуры $M = \langle D, \Sigma, \mathbf{Зн} \rangle$, $D_1 \subseteq D$.
Следующие два условия эквивалентны:

(1) M – элементарное расширение структуры M_1

(2) для любой формулы $\Phi(\boldsymbol{x}, y)$ и любого набора $\boldsymbol{a} \in D_1{}^*$
$M \vDash \Phi(\boldsymbol{a}, b)$ для некоторого $b \in D$, $\Rightarrow$
$M \vDash \Phi(\boldsymbol{a}, b')$ для некоторого $b' \in D_1$.

У. Доказать Критерий

Д. (1) → (2) .

Утверждение, что найдется, можно записать в виде формулы.

$M \vDash \Phi(\boldsymbol{a}, b)$ для некоторого $b \in D \;\Rightarrow\; M \vDash \exists u\, (\Phi(\boldsymbol{a}, u)) \Rightarrow$ эр

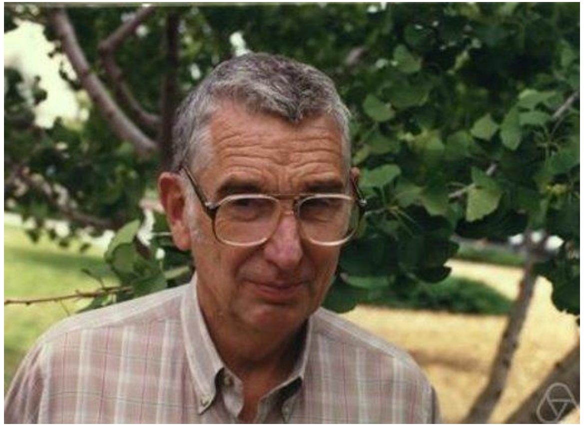
$M_1 \vDash \exists u\, (\Phi(\boldsymbol{a}, u)) \Rightarrow\; M_1 \vDash \Phi(\boldsymbol{a}, b')$ для некоторого $b' \in D_1 \Rightarrow$ эр

$M \vDash \Phi(\boldsymbol{a}, b')$.

(2) → (1). Индукция по построению. (2) – это эквивалентность

- Атомные формулы…
- Мы обеспечили случай, когда $\Phi = \exists u\, (\Psi(\boldsymbol{x}, u)\,)$

перерыв



Роберт Лоусон Воот
Robert Lawson Vaught
1926—2002

Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарной подструктуре

У. Т. Любая бесконечная структура с конечной или счетной сигнатурой содержит счетную элементарную подструктуру.

Д. Нам придется взять все элементы, для которых есть имена. Что еще?

- Надо соответствовать Критерию Т–В. Придется добавлять имена в универсум для каких-то элементов структуры, отношения на них уже есть.
- Повторяем до бесконечности.
- Берем объединение. Счетное множество?
- Почему все получилось?

Еще один общий метод = Большая идея – «Объединение цепи».

Туральф Альберт Сколем (Скулем)
Thoralf Albert Skolem
1887—1963

Леопольд Лёвенгейм
Leopold Löwenheim
1878—1957

Теорема компактности

Т. компактности (Гёдель, Мальцев)

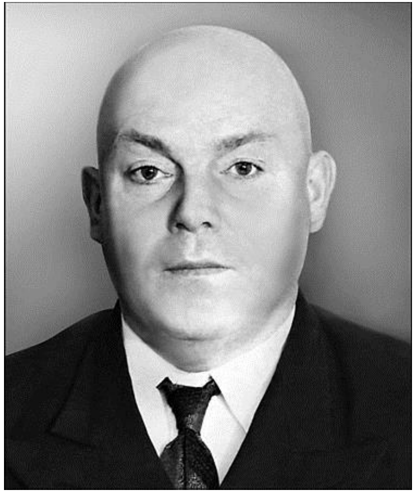
Если любое конечное подмножество теории выполнимо, то теория выполнима.

(Мальцев – теория может быть и не счетной. Мы не доказываем в курсе.)

Напоминание: **О.** Высказывание *следует* из теории, если оно истинно в любой модели теории. Обозначение $\Gamma \vDash \Phi$.

Следствие. Если утверждение следует из теории, то это утверждение следует из некоторой конечной ее части.

У. Вывести следствие из теоремы компактности.



Анатолий Иванович Мальцев
(1909—1967)

Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарном расширении

У. Т. Для любой бесконечной структуры с конечной или счётной сигнатурой существует элементарное расширение сколь угодно большой мощности.

Д. Возьмем теорию этой структуры. Она выполнима.

- Добавим имен элементов до нужной мощности.
- Добавим к теории структуры утверждения, что все значения новых имен элементов различны.
- Любая конечная часть полученной теории выполнима: выполняются высказывания из теории исходной структуры и конечное число неравенств.
- Мощность структуры, где выполняется теория, не меньше мощности множества имен элементов.
- Структура является элементарным расширением, для проверки берем формулы, не содержащие новых имен.

перерыв

Полные теории

Теория Γ – *полна*, если

$\Gamma \models \Phi$ или $\Gamma \models \neg\Phi$ для любого высказывания Φ.

У. Почему любую выполнимую теорию можно расширить до полной?

У. Th_M – полна для любой структуры *M*.

перерыв

Лекция 8. Элементарные расширения

Было:

- Элементарные расширения
- Критерий Тарского – Воота для элементарного расширения
- Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарной подструктуре
- Теорема Геделя – Мальцева о компактности
- Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарном расширении
- Полные теории