SkillFactory

Математическая логика и теория алгоритмов

Дискретная математика

Алексей Львович Семенов

Заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов
Академик Российской академии наук
и Российской академии образования

Лекция 7. Теория моделей. Определения и примеры

План:

- Равенство. Нормальные модели
- Примеры теорий порядка
- Элементарная эквивалентность
- Элементарные расширения

В лекциях

Принятые сокращения

У. – упражнение

З. – задача

О. – определение, обозначение

Т. – теорема

Д. – доказательство

Теории. Истинность. Обозначения

О. Σ – список имен объектов и отношений – *сигнатура*.
M = <D, Σ, Зн> – структура.

О. Векторные обозначения:
a набор (цепочка) элементов $a_1, \ldots, a_k$. λ – пустая цепочка,
$D^* = \{\lambda\} \cup D \cup D^2 \ldots$
Фиксируем сигнатуру Σ. Универсум D, значения Зн
имен из этой сигнатуры могут меняться.

Пусть все свободные переменный формулы Ф взяты из
списка $x_1, \ldots, x_k$
$M \vDash \Phi(a_1, \ldots, a_k)$ означает, что Ф истинна в M,
если в качестве значения каждого x_i выбрано a_i.
У. Значение Ф не зависит от других элементов контекста.

Ф – высказывание, т. е. замкнутая
(без свободных переменных) формула,
$M \vDash \Phi$ означает, что формула Ф *истинна в M*.

Теории с равенством. Нормальные структуры

В структуре полезно иметь среди двухместных отношений совпадение (одинаковость) элементов. Удобно для него использовать имя = – читается «равенство».

З. Как добиться, чтобы в любой модели теории значением имени = было совпадение?

Добиться совпадения нельзя, но хочется.

Свойства равенства:

- Свойства «совпадения», как отношения эквивалентности.
- Свойства связывающие «совпадение» с другими отношениями структуры (равное можно заменить равным).

Теория, в языке которой есть =, и она содержит все свойства равенства – *теория с равенством*.

Если значение символа = это совпадение элементов, то структура – *нормальная*.

У. У всякой ли выполнимой теории с равенством есть нормальная модель?

перерыв

Теории с равенством. Нормальные структуры

Будем дальше считать, что все теории – с равенством, а все модели – нормальные.

У. Пусть сигнатура – только =. Каковы модели теории

$\exists\, x_1,\ldots,x_n\ \forall\, y\ (y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n)$

здесь *n* фиксировано (например, $n = 6$)?

У. Бывают ли теории, у которых нет бесконечных моделей, но для каждого натурального *n* есть модель, содержащая *n* элементов?

перерыв

Линейный порядок

У. Написать определение

Двухместное отношение R – линейный порядок.
Аксиомы:

1. $\forall u\,(\neg R(u, u))$ – антирефлексивность,
2. $\forall u, v, w\,((R(u, v) \wedge R(v, w)) \rightarrow R(u, w))$ – транзитивность,
3. $\forall u, v\,(R(u, v) \vee R(v, u) \vee u = v)$ – трихотомия (линейность).

Модели – структуры, в которых отношение R задает линейный (3) порядок (1,2).

Будем писать $<$ вместо R.

У. Следствие из аксиом:

$\forall u, v\, \neg(u < v \wedge v < u)$ – антисимметричность

– рассмотреть любую модель.

Линейный порядок без наибольшего элемента

У. Написать определение

1. $\forall u\, (\neg(u < u))$
2. $\forall u, v, w\, ((u < v \;\wedge\; v < w) \to u < w))$
3. $\forall u, v\, (u < v \;\vee\; v < u \;\vee\; u = v)$

4. $\forall u\, \exists v\, (u < v)$ – всегда найдется больший.

• Примеры моделей этой теории – числовые множества с порядком, обозначения:
$\mathbb{Q}_<$, $\mathbb{R}_<$, $\mathbb{N}_<$, $\mathbb{Z}_<$.

У. Доказать, что все модели этой теории бесконечны.

Теория $\Gamma_{\mathbb{Q}}$. Плотный линейный порядок без наибольшего и наименьшего элемента

У. написать определение

Линейный порядок

$\forall u, v\ (u < v \to (\exists w\ (u < w < v)))$ – плотность

$\forall u\ \exists v\ (v < u)$ – неограниченность снизу

$\forall u\ \exists v\ (u < v)$ – неограниченность сверху

У. Привести примеры моделей

З. Можно ли что-то добавить, чтобы отделить $\mathbb{Q}_<$ от $\mathbb{R}_<$ (т. е., чтобы первая структура была моделью, а вторая – нет)?

Теория $\Gamma_{\mathbb{N}}$. Дискретный линейный порядок с наименьшим и без наибольшего

В сигнатуре имена для отношения $<$ и для элемента – (0)

Линейность

$\forall u\,(0 < u \;\vee\; u = 0)$ - 0 - наименьший

$\forall u\,(\exists v\,(u < v \;\wedge\; (\forall w\,(u < w \to (v = w \vee v < w)))))$ - следующий

$\forall u\,(u \neq 0 \to (\exists v\,(v < u \wedge (\forall w\,(w < u \to w = v \vee w < v)))))$ - предыдущий

У. Что теория «означает» (смысл)? Полезно нарисовать.

У. Какие у нее бывают модели (денотат)?

Изоморфизм

«Одинаковость» структур. Изоморфизм множеств – равномощность.

О. Пусть две структуры имеют одну сигнатуру.
Взаимно однозначное отображение универсума одной структуры на универсум другой называется ***изоморфизмом,*** если при этом отображении значение каждого имени в одной структуре переходит в значение того же имени в другой.

[Структуры $M_1 = \langle D_1, \Sigma, \mathbf{Зн}_1 \rangle$ и $M_2 = \langle D_2, \Sigma, \mathbf{Зн}_2 \rangle$
Взаимно однозначное отображение ψ: D_1 на D_2, которое переводит каждый объект, имеющий имя в D_1, в объект с тем же именем в D_2, и для каждого имени отношения $P \in \Sigma$, вектора объектов $\boldsymbol{a} \in D_1^*$, $\text{Зн}_1(P)(\boldsymbol{a}) \Leftrightarrow \mathbf{Зн}_2(P)(\psi(\boldsymbol{a}))$.]

У. Изоморфны ли структура положительных и структура всех рациональных чисел с порядком?

З. Изоморфны ли две любые счетные модели $\Gamma_{\mathbb{Q}}$?

З. Бывают ли модели теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, равномощные $\mathbb{R}$,
но не изоморфные $\mathbb{R}_<$?

Теории и структуры

M – структура

- $\mathrm{Th}_M = \mathrm{Th}(M)$ – *теория структуры M* = множество высказываний, истинных в структуре *M*.

Теория класса структур = множество высказываний, истинных в каждой структуре класса.

Пусть
- *m* – класс структур,
- φ – теория (множество высказываний).

Определим отображения:
- Th(*m*) – теория класса структур m,
- Mod(φ) – класс всех моделей теории φ.

Тогда $m \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi) \Leftrightarrow \mathrm{Th}(m) \supseteq \varphi$. Говорят, что

<Th, Mod> – *соответствие Галуа* (анти-монотонное).

Эквивалентность структур

Структуры *(элементарно) эквивалентны*, если их теории совпадают

У. Почему изоморфные структуры эквивалентны?

• Индукцией по построению (не обязательно замкнутой) формулы Ф: $M_1 \vDash \Phi(\boldsymbol{a}) \;\Leftrightarrow\; M_2 \vDash \Phi(\psi(\boldsymbol{a}))$ в каждом контексте.

У. Бывают ли эквивалентные неизоморфные структуры?

У. А одной мощности?

Элементарное расширение

$M = \langle D, \Sigma, \mathbf{Зн} \rangle$, $M_1 = \langle D_1, \Sigma, \mathbf{Зн}_1 \rangle$,

О. *Подструктура:* сигнатура та же,

- универсум – подмножество и
- значения имен элементов лежат в под-универсуме,
- значения имен отношений совпадают на под-универсуме.

О. *M – элементарное расширение M_1* :

- *M_1 – подструктура M*
- Значение любой формулы в обеих структурах совпадают на элементах подструктуры:
  $M \vDash \Phi(\boldsymbol{a}) \iff M_1 \vDash \Phi(\boldsymbol{a})$ для любых наборов $\boldsymbol{a} \in D_1^*$.

У. M эквивалентна M_1.

З. Бывают ли такие структуры M и M_1, что
(1) M_1 – подструктура M, и M_1 эквивалентна M, но
(2) M_1 не является элементарной подструктурой M?

перерыв

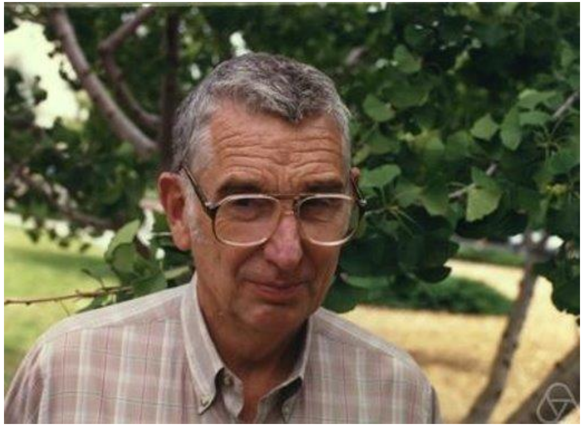
Критерий Тарского – Воота

Пусть $M_1 = \langle D_1, \Sigma, \mathbf{Зн}_1 \rangle$ – подструктура структуры $M = \langle D, \Sigma, \mathbf{Зн} \rangle$, $D_1 \subseteq D$.
Следующие два условия эквивалентны:

(1) M – элементарное расширение структуры M_1

(2) для любой формулы $\Phi(\boldsymbol{x}, y)$ и любого набора $\boldsymbol{a} \in D_1^*$
$M \vDash \Phi(\boldsymbol{a}, b)$ для некоторого $b \in D$, $\Rightarrow$
$M \vDash \Phi(\boldsymbol{a}, b')$ для некоторого $b' \in D_1$.

У. Доказать Критерий



Роберт Лоусон Воот
Robert Lawson Vaught
1926—2002

перерыв

Лекция 7. Теория моделей. Начала

Было:

- Равенство. Нормальные модели
- Примеры теорий порядка
- Элементарная эквивалентность
- Элементарные расширения