Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Львович Семенов

Заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов
Академик Российской академии наук
и Российской академии образования

Лекция 6. Построение модели теории логики отношений

План:

- Лемма Кёнига
- Двоичное дерево. Окрестности
- Покрытия окрестностями
- Покрытие открытыми. Теорема компактности
- Теорема компактности в топологии и логике высказываний
- Построение модели для локально конечных теорий
- Теорема компактности для логики отношений
- Следствия. Перечислимость следствий
- Перечислимость истин логики отношений

В лекциях

Принятые сокращения

У. – упражнение

З. – задача

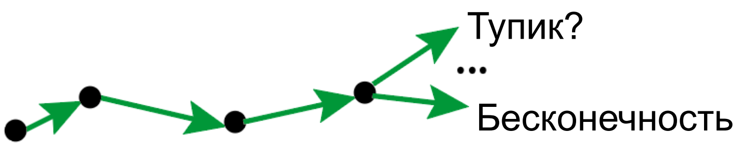
О. – определение

Д. – доказательство

Лемма Кёнига. Покрытия

У. Лемма Кёнига. Бесконечное дерево с конечным ветвлением содержит бесконечный путь (начинающийся в корне).

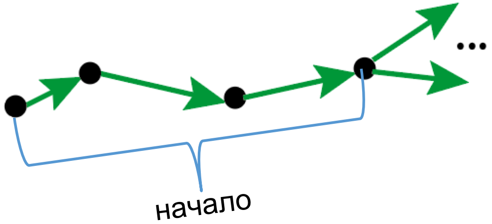
Д. Одна из ветвей ведет в бесконечное дерево.



Двоичное дерево. Окрестности. Покрытия

$\boldsymbol{B}^{\omega}$ – дерево всех бесконечных двоичных последовательностей.

О. *Окрестность* – множество всех последовательностей, продолжающих данную конечную последовательность – *начало окрестности*.



О. *Покрытие* – семейство окрестностей. *Покрытие чего-то...*

Покрытия окрестностями и открытыми множествами

У. Из всякого покрытия $\boldsymbol{B}^{\omega}$ можно выбрать конечное подпокрытие.

- **Д.** Если нельзя, то нельзя для одного из поддеревьев. Бесконечный путь должен быть покрыт окрестностью.

О. Открытое множество – объединение какого-то семейства окрестностей.

Следствие:

У. Теорема компактности. Из всякого покрытия $\boldsymbol{B}^{\omega}$ открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

перерыв

Дополнения

У. Дополнение к окрестности есть объединение конечного множества окрестностей. Дополнение открыто.

У. Пусть пересечение любого конечного подсемейства семейства открытых множеств непусто, тогда и пересечение всех непусто.

У. **Д.** *Перейти к дополнению.*

Большая идея: локальное поведение (поведение в конечном) определяет глобальное (поведение на бесконечности).

У. Привести пример ситуации, когда пересечение всякого конечного семейства не пусто, а пересечение всего семейства – пусто.

перерыв

Топология

О. Топологическое пространство называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

У. **Теорема компактности (Топология).** Пусть дано семейство замкнутых множеств компактного пространства. Если всякое конечное подсемейство имеет непустое пересечение,
то и пересечение всех множеств семейства
не пусто.

Логика высказываний

3. Теорема компактности (Логика высказываний).
Пусть дано семейство формул логики высказываний.
Если всякое его конечное подсемейство выполнимо,
то и все семейство выполнимо.

$\boldsymbol{B}^{\omega}$ – последовательность значений атомных высказываний.

Множество, на котором формула истинна - это открытое подмножество $\boldsymbol{B}^{\omega}$.

Логика отношений

О. Высказывание логики отношений – формула без свободных переменных. В заданной структуре значение высказывания – И, или Л, не зависит от контекста.

О. Семейство высказываний *T выполнимо*, если существует структура *S*, где они все истинны – *модель* системы. Обозначение: $S \vDash T$

З. Теорема компактности (Логика отношений). Пусть дано семейство высказываний логики отношений. Если всякое его конечное подсемейство выполнимо, то и всё семейство выполнимо.

Будем считать, что в языке есть только ¬, ∃, ∨

О. *Теория* – пара множеств высказываний <Утверждения, Опровержения>. *Модель теории*...
Теория *локально выполнима,* если у любой конечной подтеории этой теории есть модель.

У. Для (локально) выполнимой теории У и О не пересекаются.

Теорема компактности.

Замысел построения модели

О. Теория локально выполнима, если у любой конечной подтеории этой теории есть модель.

Попытаемся построить модель локально выполнимой теории T – структуру $S \vDash T$.

Что-то о ней уже известно: атомные высказывания из теории T задают значения некоторых отношений на некоторых объектах.

Расширяем теорию, возможно, рассматривая разные варианты расширения:

- добавляем более простые высказывания, получаемые из составных.
- следим, чтобы получаемые теории оставались локально выполнимыми.

Получаемые атомные высказывания зададут значения отношений в требуемой модели.

Теорема компактности.
Замысел построения модели

Строим цепь расширений – каждая вершина – теория, расширяющая предыдущую:

- берем из предыдущей составное высказывание, выделяем его составляющие; (какое высказывание брать – обсудим)
- добавляем какие-то более простые высказывания в следующую теорию; пытаемся сохранить локальную **выполнимость**.

У. Случаи, которые нужно рассматривать:

- Взяли высказывание из У или О?
- Составное высказывание – это:
  - $\neg A$
  - $\exists x\, A(x)$
  - $A \vee B$?

Теорема компактности.

Реализация замысла: ¬

Добавляем какие-то более простые формулы в теорию; какие?

У. Случаи:

- Взяли высказывание из У или О?
- Составное высказывание – это:
  - ¬ A

Что делать?

Теория – это <У, О>

Кладем A в противоположный компонент.

Локальная выполнимость?

Теорема компактности. Реализация замысла: ∃

Добавляем какие-то более простые формулы в теорию; какие?

У. Случаи:

- Высказывание из У или О?
- Составное высказывание – это:
  - $\exists x\, A(x)$ Что делать?

В языке есть имена объектов

- $\exists x\, A(x)$ – из О $\Rightarrow A(c) \rightarrow$ в О, для всех имен c из предыдущей теории
- $\exists x\, A(x)$ – из У $\Rightarrow A(c) \rightarrow$ в У, для нового имени c (расширяем язык)
- Локальная выполнимость?

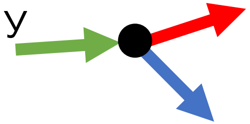
Теорема компактности.

Реализация замысла: ∨

Добавляем какие-то более простые формулы в теорию; какие?

У. Случаи:

- Составное высказывание – это:
  - $A \vee B$ Что делать?
    - $A \vee B$ – из О $\Rightarrow$ A и B $\rightarrow$ в О
    - $A \vee B$ – из У $\Rightarrow$ цепь теорий должна разветвиться:
      варианты A $\rightarrow$ в У и B $\rightarrow$ в У



    - Локальная выполнимость?

– по крайней мере в одном варианте

Теорема компактности.

Реализация замысла: дерево теорий

Мы строим дерево. На каждом шаге добавляем вершины к каждому листу. Возникают альтернативные теории.
Что нам может помешать?

Для каких-то из вершин могло возникнуть противоречие:

- У и О начали пересекаться - тупик.

У. Могут ли все варианты стать тупиковыми?

- Возьмем конечную подтеорию, посмотрим, что мы использовали для ее построения. Это - конечная подтеория, а у нее есть модель.
- Надо проверить в каждом случае, может ли возникнуть тупик, если конечная подтеория была выполнима

Теорема компактности.

Развитие замысла. Построение модели

Как определить структуру, где выполнится теория?

В нашем дереве есть **бесконечная цепь** от корня. По ней:

- К исходным атомным формулам в О и У постоянно добавлялись новые, в том числе – с новыми именами объектов.

Возьмем в качестве универсума все имена объектов, встречающиеся в **цепи**.

Значение имени отношения на каких-то объектах - И, если атомная формула входит в У в какой-то вершине **цепи**.

Докажем выполнимость (не локальную!) теории.

- Индукция по построению формулы

У. В чем может быть проблема?

- ∃x A(*x*) – из О ⇒ A(*c*) → в О, для всех имен *c* из предыдущей теории

перерыв

Теорема компактности.

Завершение замысла. Выбор высказывания

Как добиться чтобы A(x) опровергалось для всех объектов структуры?

Надо гарантировать что для каждого объекта c в какой-то момент A(c) добавлено в O.

Достаточно потребовать, чтобы мы рассматривали каждую формулу на каждой бесконечном пути бесконечное число раз.

Тогда всякое имя c появится на конечном шаге, потом очередной раз появится $\exists x$ A(x) и A(c) будет добавлено в O.

У. Сформулировать правило выбора высказывания для рассмотрения.

Теорема компактности.

Итог

Теорема компактности (для логики отношений). Если любая конечная часть теории имеет модель, то и вся теория модель имеет.

В нашем доквазтельстве мы неявно предполагали, что теория (оба компонента) счётна.

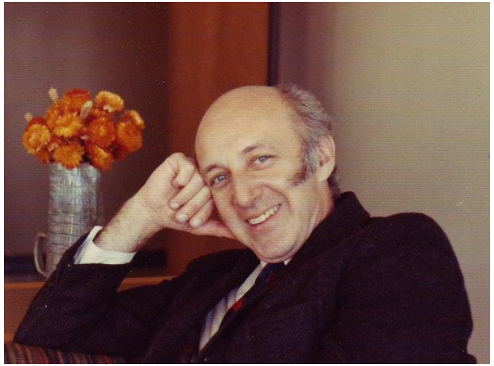
В этой формулировке теорему доказал в 1930 г. Курт Гёдель – это была его диссертация.

Что будет, если теория несчетна? Теорема тоже верна – Анатолий Иванович Мальцев – 1936 г.

Доказательство, которое мы построили, следует подходу Леона Хенкина.

Анатолий Иванович Мальцев
(1909—1967)

Курт Фридрих Гёдель
Kurt Friedrich Gödel
(1906—1978)



Леон Альберт Хенкин
Leon Albert Henkin
(1921—2006)

Королларий: следствия из теории перечислимы

О. Высказывание *следует из теории* (другими словами – *является следствием из нее*), если оно истинно во всякой модели этой теории.

У. Перечислимость следствий (Теорема о полноте). Пусть какой-то алгоритм или оракул по запросу последовательно сообщает нам все Утверждения и Опровержения некоторой теории.

Тогда мы можем перечислить все следствия этой теории.

Д. Будем последовательно рассматривать все высказывания данного языка. Для каждого из них будем добавлять его отрицание в Опровержения и строить модель для получаемой теории.

Если в какой-то момент попытка построить модель закончится неудачей (дерево – конечно), то выбранное высказывание является следствием.

Королларий – следствие из доказательства. (В. А. Успенский)

Перечислимость истин

О. Истина или общезначимое высказывание логики отношений – то, что истинно в любой модели пустой теории.

У. Истины логики отношений перечислимы.

Д. Нам удавалось опровергнуть отрицание истины. «Доказательство от противного»

Лекция 6. Построение модели теории логики отношений

Что было:

- Лемма Кёнига
- Двоичное дерево. Окрестности
- Покрытия окрестностями
- Покрытие открытыми. Теорема компактности
- Теорема компактности в топологии и логике высказываний
- Построение модели для локально конечных теорий
- Теорема компактности для логики отношений
- Следствия. Перечислимость следствий
- Перечислимость истин логики отношений