SkillFactory

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Львович Семенов

Заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов
Академик Российской академии наук
и Российской академии образования

Лекция 4. Элиминация кванторов

План:

- Примеры. Уравнения с параметрами
- Полуалгебраические множества
- Проекция. Элиминация кванторов
- Алгебра многочленов
- Доказательство: диаграммы
- Теорема Тарского
- Применения: геометрия

Исходный пример

Условие существования решения уравнения $x^2+px+q = 0$:

$$p^2 - 4q \geq 0$$

В терминах определимости:

- Формула $\exists x\ (x^2+px+q = 0)$ **эквивалентна формуле**

$$p^2 - 4q \geq 0$$

Полуалгебраические множества

Что определимо (является значением формулы) в структуре действительных чисел, полиномиальных равенств и неравенств?

Мы представляем себе множество решений… в виде формы... в одних направлениях уходит в бесконечность, а в других прихотливо замыкается на себе.

Разнообразие и сложность таких форм бесконечно богаче, чем все, что можно увидеть на современных выставках абстрактного искусства.

Юрий Иванович Манин
16.02.1937 -

Полуалгебраические множества

Полуалгебраические множества (отношения) задаются бескванторными (булевыми) формулами.

Как обстоит дело с проекцией полуалгебраического множества – существованием решения у совокупности систем уравнений и неравенств?

Обобщение ситуации с квадратным уравнением.

Определимость совпадает с определимостью бескванторными (булевыми) формулами.

Полуалгебраические множества

Простейшие примеры

Есть ли корень у алгебраического уравнения от одной переменной?

(Нечетная и четная степень.)

При каких значениях параметров есть корень?

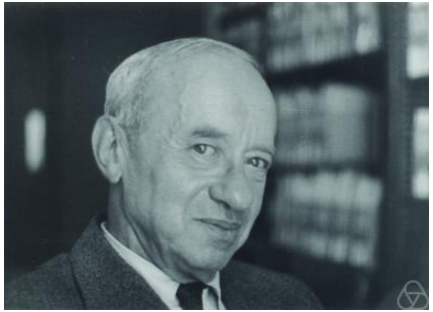
Теорема Тарского об определимости в поле действительны чисел

Универсум – действительные числа.

Атомная формула – равенство нулю, положительность и отрицательность многочлена (от нескольких переменных) с целыми коэффициентами.

По всякой формуле можно построить бескванторную, ей эквивалентную.

Все определимые отношения определяются бескванторными формулами.



Альфред Тарский
14.01.1901 –
26.10.1983

Алгебра многочленов

Самое главное соображение

Знак многочлена в точке: 0, +, –.

По многочлену p и многочлену q той же или меньшей степени можно построить такой многочлен r меньшей степени, что:

- **знак многочлена p в корне многочлена q равен знаку многочлена r в той же точке.**

У. Как построить?

перерыв

Алгебра многочленов

Самое главное соображение

По многочлену p и многочлену q той же или меньшей степени можно построить такой многочлен r меньшей степени, что:

- знак многочлена p в корне многочлена q можно найти по знаку многочлена r в той же точке.

У. Как построить?

$$p = uq + r,$$

для некоторого u – деление с остатком.

Знаки просто совпадают. Но всегда ли r – многочлен?

У. Как построить r так, чтобы он действительно был многочленом (от всех переменных) и не содержал алгебраических дробей?

перерыв

Алгебра многочленов

Где возникают дроби?

Будем делить многочлены в столбик.

У. На что мы умножаем и делим в процессе деления?

Чтобы не возникало дробей, надо заранее p домножить на нужную степень старшего коэффициента q.

Получается *операция модифицированного деления*.

У. Рассмотреть пример.

У. Найти степень для домножения.

У. Как теперь определить знак p в корне q по знаку r?

Алгебра многочленов

Еще соображения

У. Если на интервале функция меняет знак, на этом интервале у нее есть корень.

У. Если на интервале у производной функции нет корня, то на этом интервале у функции нет двух корней.

У. Знак многочлена вне отрезка его корней определяется номером и знаком старшего не нулевого коэффициента.

Диаграмма семейства многочленов

Действительные числа. Метод интервалов

$p_1(x)$	+	0	–	0	+	0	+	+	+
$p_2(x)$	–	0	+	+	+	+	+	+	+
$p_3(x)$	–	–	–	0	+	+	+	0	–

Сегмент – точка, или открытый интервал.

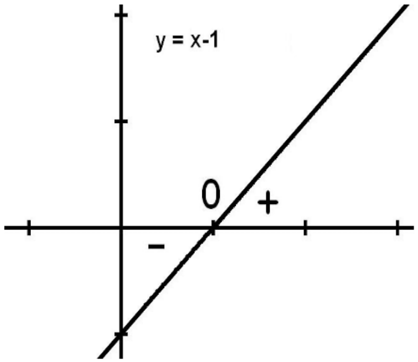
На каждом сегменте знак каждого многочлена постоянен.

В левом столбце перечислены все многочлены семейства.

У. Если известна диаграмма, то известно, существует ли *x*, для которого данная булева формула, включающая только многочлены семейства, истинна.

Диаграмма

Пример



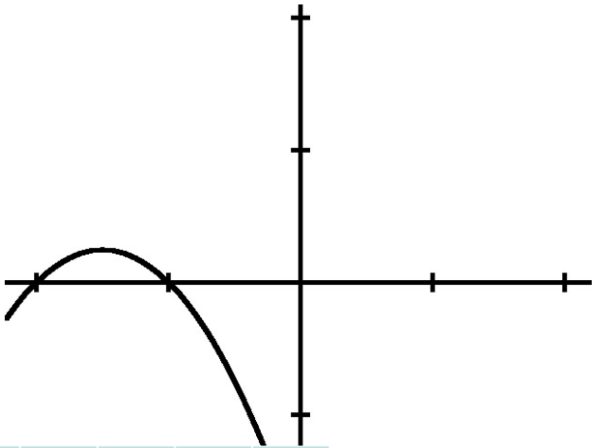
-	0	+

«это – диаграмма x_2x+x_1»

$\leftrightarrow x_2>0$

Диаграмма

Пример



-	0	+	0	-

«это – диаграмма $x_3x^2+x_2x+x_1$»
$\leftrightarrow x_3<0 \wedge x_2^2 - 4x_3x_1>0$

Редукция

Операции редукции

Мы выясняли что-то про знаки и корни многочлена, пользуясь информацией о многочленах меньшей степени, получавшихся операциями:

1. **Модифицированный остаток**
2. **Взятие старшего коэффициента**
3. **Отбрасывание старшего члена**
4. **Дифференцирование**

У. Что нам дает каждая из операций?

Подсказка. Старший коэффициент может быть равен нулю.

Редукция

Последовательность семейств многочленов

Пусть у нас дано семейство многочленов F, степени, не превосходящей n. Индуктивно определим последовательность: $F_n, \ldots F_0$:

$F_n = F$; F_{k-1} получается из F_k применением операций 1–4 к F_k, а также применением операции модифицированного остатка от деления всех уже полученных многочленов на многочлены из F_k.

У. Степени многочленов F_k не превосходят k.

У. Докажите, что F_0 содержит все коэффициенты всех многочленов из F_n.

Построение Большой диаграммы

Диаграмма исходного семейства – верхняя часть Большой диаграммы

Левый столбец большой диаграммы состоит из блоков.

F_n
F_{n-1}
….
F_0

В n-ом блоке выписаны в любом порядке элементы F_n.

Построение Большой диаграммы

Нулевой шаг

Добавляем к таблице один столбец.

F_n	
F_{n-1}	
….	….
F_0	

В нижнем блоке столбца в каждой строке ставим какой-то знак против каждого многочлена нулевой степени по *x*.

Построение Большой диаграммы

Идем снизу вверх. Очередной шаг.

Заполняем строки, соответствующие многочлену *p* из *k*-ого блока и создаем новые столбцы.

F_n	
F_{n-1}	
….	….
F_0	

У. Доказать, что все действия корректны и других возможностей нет.

I) заполняем каждую клетку, отвечающую корню многочлена степени не выше *k.* Делим *p* на этот многочлен и используем знак из остатка (он есть в блоке ниже).

II)заполняем клетки, отвечающие бесконечным интервалам, с учетом старшего члена с ненулевым коэффициентом.

III) заполняем остающиеся клетки:

- в концах одинаковые знаки, или ноль и не ноль. Копируем не ноль.
- в концах + и –. Разбиваем столбец на три (по всей высоте), ставя соответствующие знаки.

Завершение элиминации квантора

Диаграмма исходного семейства – верхняя часть Большой диаграммы

Для каждого варианта заполнения 0-го блока строим n-ый блок.

Из n-ых блоков отбираем те, которые означают существование x.

Смотрим, из каких 0-ых блоков получились эти n-ые. Берем их дизъюнкцию. Это и есть результат элиминации.

Разрешимость

Частный случай. Что происходит, если в исходной формуле нет параметров, есть только одна переменная?

У. Как выглядит нулевой блок? Сколько таких блоков возможно?

У. Что мы получаем в *n*-ом блоке?

Мы построили алгоритм,
выясняющий истинность исходной формулы
(с одним квантором существования) –
Разрешающий алгоритм.

У. Построить алгоритм, выясняющий истинность любой формулы.

Следствие. Геометрия

Любое утверждение элементарной геометрии можно записать как алгебраическое.

В силу теоремы Тарского можно проверить истинность любой теоремы.

Пример. Гипотеза 13 шаров: спор между Ньютоном и Грегори: «Сколько материальных шаров равных радиусов можно «прислонить» к фиксированному шару того же радиуса?»

- Существование решения у системы уравнений с 39 неизвестными.
- Невозможность (правота Ньютона) доказана Л. Ван дер Варденом и К. Шютте в 1953 году (без теоремы Тарского).
- http://www.etudes.ru/ru/mov/mov004/

Лекция 4. Элиминация кванторов

Что было:

- Примеры. Уравнения с параметрами
- Полуалгебраические множества
- Проекция. Элиминация кванторов
- Алгебра многочленов
- Доказательство: диаграммы, редукция
- Теорема Тарского
- Применения: геометрия