Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 16

Алексей Львович Семенов

Равномощность

- Множества x и y *равномощны* ($Sm(x, y)$), если существует взаимно однозначная функция, отображающая x на y, то есть $\exists f\, (IFunc(f) \wedge x = Dom(f) \wedge y = Ra(f))$.
- $Sm(x, y)$ – отношение эквивалентности.

Для любых двух множеств одно равномощно подмножеству другого.

Теорема Кантора

Множество x *не равномощно* $P(x)$.

Д. Пусть f — взаимно однозначная функция, отображающая x на $P(x)$.

- Пусть $a = \{y \mid y \in x \wedge y \notin f(y)\}$.
- Должно найтись такое $z \in x$, что $a = f(z)$.
- Если $z \in a$, то $z \notin f(z) = a$.
- Если $z \notin a = f(z)$, то $z \in a$.
- Противоречие.

Возможна ли счетная модель теории множеств?

- Теорема Лёвенгейма – Сколема
- Отображения? Не все «внешние» отображения оказываются «внутренними».

Первая проблема Гильберта

Гипотеза континуума:

- Между мощностью натурального ряда и мощностью множества всех подмножеств натурального ряда нет промежуточных.

Возможности для математики

Математика содержит **ZF**.

1. Математика противоречива, в ней выводится $A \wedge \neg A$. Тогда в ней выводится всё что угодно, так как $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$ – тавтология.

2. Математика непротиворечива, и это можно математически доказать, пользуясь особо надежными рассуждениями (надежда Гильберта).

3. Оказалось, что (2) невозможно (Гёдель).

Непротиворечивость расширений теории множеств

- Если теория множеств непротиворечива, то к ней можно добавлять континуум-гипотезу или её отрицание и можно добавлять аксиому выбора или её отрицание, и она не станет противоречивой.
- Возможность добавления аксиомы выбора и континуум-гипотезы – Гёдель, 1940.
- Возможность добавления отрицаний (недоказуемость Аксиомы выбора и Гипотезы континуума) – Коэн, 1963 (форсинг), Вопенка, 1965 (булевозначные модели).
- Независимость аксиомы (гипотезы) – возможность принять либо её, либо её отрицание.
- Невыводимость = возможность принять отрицание.

Аксиома выбора

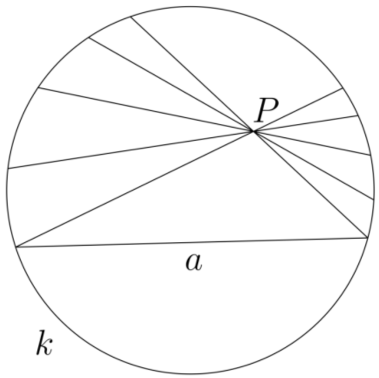
- Для всякого множества S существует функция выбора, т. е. функция, отображающая всякое непустое подмножество S в его элемент (выбирающая этот элемент).
- Интуитивная правдоподобность.
- Меньшая очевидность, чем у других аксиом.
- Полезность.
- Парадоксальность следствий.
- Как же «на самом деле»?
- Не вытекает ли АС из других аксиом?
- Аксиома выбора для счётных множеств.

Независимость

Аксиома параллельности (единственность)

– Меньшая очевидность, чем у других аксиом
– Полезность. Попытки доказать
– Геометрия Лобачевского (отрицание Акс. Параллельности)
– Модель Клейна
    • В обычной геометрии
    • Точки (точки)
    • Прямые (хорды – интервалы)
    • Аксиомы, кроме параллельности, выполнены.
    • Аксиома параллельности – ложна.
    • Независимость

•Что сделал Лобачевский?



Николай Иванович Лобачевский
01.12.1792 — 24.02.1856

Феликс Клейн
25.4.1849 — 22.6.1925

Независимость

- Аксиома выбора?
- Независимость аксиомы бесконечности

Аксиома бесконечности:

- $$\exists s\Big(\exists u\big(u \in s \wedge \forall v(v \notin u)\big) \wedge \forall u\big(u \in s \to \exists v\big(v \in s \wedge \forall w\big(w \in v \leftrightarrow (w \in u \vee w = u)\big)\big)\big)\Big)$$
- Словесная формулировка аксиомы бесконечности: существует такое множество s, что оно содержит пустое множество и вместе с каждым элементом u содержит элемент $v = u \cup \{u\}$ (каждый элемент v либо совпадает с u, либо является элементом u).

Независимость

- **3**. Построить модель, в которой аксиома бесконечности ложна,

  а все остальные аксиомы ZF истинны.

Направление решения:

- Предполагаем, что у **ZF** существует модель M. Строим *интерпретацию* теории множеств: в модели M выделяем класс M' и задаем на этом классе два двухместных отношения $\in_{M'}$ и $=_{M'}$.
- В структуре $\boldsymbol{I} = \langle M', \in_{M'}, =_{M'} \rangle$ выполнены все аксиомы, кроме аксиомы бесконечности.

Независимость аксиомы бесконечности

- В структуре M существует элемент $\omega = \{0, 1, 2, \dots\} =$ $= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}, \dots\}$. Следующий элемент: $S(x) = x \cup \{x\}$.
- Индуктивное определение отношения F на ω :
  - (1) $F(0) = \emptyset$,
  - (2) $F(n + 1) = F(n) \cup P(F(n))$.
- По индукции: F является функцией, единственна, определена на всем ω и возрастает.
- Положим:
  - $\alpha = \bigcup\{ F(n) \mid n \in \omega \}$. M' – это α,
  - отношения $\in_{M'}$ и $=_{M'}$ – ограничения соответствующих отношений на M':
- Тогда

$$x \in_{M'} y \Leftrightarrow x \in y,$$

$$x =_{M'} y \Leftrightarrow x = y.$$

- Ни ω, ни α не включены в M'.

Независимость аксиомы бесконечности

Итоги. Вопросы и ответы

- Что такое математика?
  - Доказуемо – породимо в конкретном исчислении: исчисление отношений + аксиомы теории множеств ZF
  - Мы можем принимать или отрицать некоторые важные утверждения – Аксиому выбора, Континуум гипотезу

Итоги

- Что такое вычислимость и породимость?
  - Примеры и наблюдения
    - вычисления конкретным алгоритмом,
    - доказательства в конкретном исчислении,
    - Индуктивное определение конкретного понятия
  - Базовое понятие, не формализуемое в теории множеств
    - Понятие действия
  - Вычислимость и породимость попадают в теорию множеств, если принять Тезис Черча и тезис об исчислениях
    - Грамматики
    - Алгоритмы Маркова

Итоги

- Логика высказываний. Формулы и функции.
- Что такое математическая структура?
  - Множество с отношениями
- Определимость, истинность
- Положительные результаты
  - Модальная логика и Исчисление для нее
  - Логика отношений. Породимость множества общезначимых формул. Исчисление
  - Разрешимость истинности для поля действительных чисел, элиминация кванторов
  - Определимость вычислимости в арифметике

Итоги

- Классы моделей и теории
  - Существование модели у теории, в которой не доказуемо противоречие
- Неопределимость
  - Существование автоморфизмов элементарных расширений – Теорема Свенониуса

Итоги

- Отрицательные результаты
  - Неопределимость истинности в структуре, где определима подстановка
  - Не существование исчисления для истин в структуре, где определима подстановка и породимость – Теорема Геделя
- Программа Гильберта
  - Доказательство непротиворечивости и полноты «надежными средствами»
  - невозможно

Итоги

- Вычислимость
- Сложность объекта, как минимальная длина описания
- Переборные задачи. Существование универсальной переборной задачи. Проблема перебора.

Методы

- Диагональ. Самоприменимость
- Челнок, объединение возрастающих цепей
- Разбор случаев
- Моделирование. Универсальность