

Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 11

Алексей Львович Семенов

План

- Парадоксы самоприменимости
- Теорема Тарского о невыразимости истины
- Теорема Геделя о неполноте
- Теорема Геделя о недоказуемости непротиворечивости
- Недоказуемость «естественного» утверждения
- Программа Гильберта

**Утверждение, которое вы сейчас видите на
экране, –**

ЛОЖНО.

Формализация

Утверждение в
формальном языке,
говорящее о
собственной ложности

- Ложность (истинность) можно понимать по-разному.

Арифметики

Арифметика = «Настоящие» натуральные числа и операции

Можно рассматривать слова в алфавите $0,1$ (алфавит **B**) и операции над ними, через которые определять арифметические операции

Можно рассматривать отношения вместо операций

Арифметики

Существует много структур, не изоморфных
Настоящим натуральным числам (с операциями),
но со всеми свойствами натуральных чисел.

- то есть они имеют ту же теорию
- нестандартные модели с бесконечно большими элементами

Желаемое:

- Все свойства натуральных чисел могут быть выведены из некоторых Аксиом

Арифметика Пеано

Аксиомы, в добавление к аксиомам исчисления логики отношений

Аксиомы Пеано (замыкания формул, т. е. \forall впереди)

1. Аксиомы равенства для S , $+$, \times ,

2. $\neg S(x) = 0$, $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$,

3. $x + 0 = x$, $x + S(y) = S(x + y)$,

4. $x \times 0 = 0$, $x \times S(y) = x \times y + x$,

5. (Схема аксиом индукции)

$(\Phi(x) \wedge \forall u(\Phi(u) \rightarrow \Phi(S(u)))) \rightarrow \forall u\Phi(u)$,

для любой формулы Φ .

(У Джузеппе Пеано аксиомы были другие.)

Этих аксиом оказывается достаточно для известных доказательств в теории чисел.

Арифметики

Реальность:

- Не существует системы аксиом, из которых могут быть выведены все свойства («настоящих») натуральных чисел, записываемые в логике отношений (и только они).

- в частности, не годится система аксиом Пеано

- тема сегодня

Кодирование

- Нам нужно в языке говорит о формулах самого языка
- Структура – ансамбль слов в алфавите $\{0, 1\}$.
Отношения введем постепенно
- Язык логики отношений.
- Слова в алфавите языка логики отношений кодируются в алфавите $\{0, 1\}$.

Задача. Придумать способ кодирования слов в любом алфавите словами в **B**.

- Цепочки слов – тоже кодируются

Задача. Придумать способ кодирования цепочек слов

Структура М (вариант арифметики)

Область – слова в алфавите $\{0,1\}$.

В сигнатуре есть $0,1$ может быть операция приписывания слов, могут быть, кроме этого, $+$, \times и др. Слова в алфавите $\{0,1\}$ – термы (но могут быть и другие термы).

Задача. Как обойтись в дальнейших рассуждений без функций, используя только символы для отношений.

Условие на структуру: Выразима функция подстановки:

Подст: Код слова, получаемого подстановкой вместо свободной переменной x

второго аргумента

в формулу, кодом которой является первый аргумент.

Пусть Γ – формула с одной свободной переменной x . Что такое

Подст (код Γ , код Γ)?

Это – код Γ (код Γ)

Гёделева диагональ

- Φ – какая-то формула с одной свободной переменной
- $\Gamma = \neg \Phi$ (Подст(x, x))
- Γ (код Γ) = $\neg \Phi$ (Подст (код Γ , код Γ)) = $\neg \Phi$ (код Γ (код Γ))

Теорема Тарского. Не существует формулы Φ в заданной сигнатуре, выражающей свойство: «быть кодом истинного в M утверждения».

Д. Предположим, такая формула Φ существует. Построим Γ для Φ .

Пусть: Γ (код Γ) – истинно. **Тогда:**

Φ (код Γ (код Γ)) – истинно (Предпол.),
 $\neg \Phi$ (код Γ (код Γ)) – ложно, т.е.
 Γ (код Γ) – ложно (см. выше).

Пусть: Γ (код Γ) – ложно. **Тогда:**

Φ (код Γ (код Γ)) – ложно (Предпол.),
 $\neg \Phi$ (код Γ (код Γ)) – истинно,
 Γ (код Γ) – истинно.

Гёделева диагональ

- Φ – формула с одной свободной переменной
- $\Gamma = \neg \Phi$ (Подст(x, x))
- Γ (код Γ) = $\neg \Phi$ (Подст (код Γ , код Γ)) = $\neg \Phi$ (код Γ (код Γ))

Пусть в нашей структуре M для всякого исчисления над алфавитом $\{0,1\}$ выразимо свойство «быть кодом породимого (выводимого) в этом исчислении слова».

Теорема Гёделя о неполноте. Не существует исчисления, порождающего в точности истинные в нашей структуре формулы.

Д. Пусть такое исчисление существует, и Φ выражает свойство «быть кодом породимого слова».

Пусть: Γ (код Γ) – истинна. **Тогда:** она выводима.

Φ (код Γ (код Γ)) – истинно,

$\neg \Phi$ (код Γ (код Γ)) – ложно,

Γ (код Γ) – ложно. Противоречие

Пусть: Γ (код Γ) – ложна. **Тогда:** она не выводима.

Φ (код Γ (код Γ)) – ложно,

$\neg \Phi$ (код Γ (код Γ)) – истинно,

Γ (код Γ) – истинно. Противоречие 12

Комментарий

- Предположение: Пусть в нашей структуре M для всякого исчисления над алфавитом $\{0,1\}$ выразимо свойство «быть кодом породимого (выводимого) в этом исчислении слова».
- «Структура достаточно богата»
- Породимост ь исчислением = Породимост ь грамматикой – достаточно нескольких простых отношений
- Все интересные для описания математики структуры достаточно богаты

Теорема Геделя о неполноте

- Другое доказательство
- **Задача.** Множество истинных формул – не породимо.
- Подсказка. Всякое породимое множество можно выразить в («достаточно богатой») арифметике.
- **Задача.** Как из этих соображений получить Т. Геделя?

Теорема Геделя о неполноте

- Программа Гильберта
- Не истинность, а доказуемость
- Теорема Геделя, иная формулировка
 - Существуют утверждения такие, что не доказуемо ни утверждение, ни его отрицание

Программа Гильберта.

Полнота. Невозможна, в силу Теоремы Геделя о неполноте

Непротиворечивость.

Доказательство невозможности получить противоречие надежными, «финитными» средствами. (как невозможность получить какую-то позицию в шахматной игре).

Пусть в нашей структуре M для всякого исчисления над алфавитом $\{0,1\}$ выразимо свойство «быть кодом выводимого в этом исчислении слова».

Пусть Φ выражает свойство «быть кодом выводимого слова».

Аксиоматическая теория – исчисление, получаемое добавлением к исчислению логики отношений каких-то аксиом.

Формула $\text{Непр} = \neg \Phi$ (код 0), здесь 0 – Ложь, из нее выводится все.

Вторая теорема Гёделя о неполноте. Не существует непротиворечивой аксиоматической теории, в которой выводимо утверждение о ее непротиворечивости.

То есть Непр - невыводимо.

Задача. Как может выглядеть доказательство?

Таким образом, непротиворечивость не может быть установлена не только «финитными» средствами, но даже средствами самой теории.

Соотношение с обычной арифметикой

- Сигнатура приписывания не менее естественна, чем сигнатура сложения и умножения.
- В рассматриваемой сигнатуре могут быть $+$, \times .
- Подстановка и выводимость («быть кодом выводимой формулы») могут быть выражены через приписывание, а приписывание – через $+$, \times .
Приписывание несущественно расширяет арифметику.

Программа Гильберта

- Арифметика Пеано не полна
- Теория множеств (она будет сформулирована) – не полна (или противоречива)
- Доказательство непротиворечивости невозможно
- Возможна ли математика?

Естественные недоказуемые утверждения

- Важные теоремы и проблемы теории чисел, комбинаторики, математической логики, теории вычислений и т. д. можно формулировать в арифметике
- Постепенно для них удастся найти доказательства, решения и т. д.
- Теорема Геделя показывает, что иногда это может быть и не так – возможны утверждения, для которых доказательство или опровержение (в теории Пеано) не будет найдено никогда.
- Однако в теореме Геделя утверждение «диагональное», «самоприменимое», «специально построенное», говорит что-то о самой теории и доказуемости и т. д.
- Если ли «естественные» утверждения арифметики, не доказуемые и не опровержимые?

Истинное, но не доказуемое в РА утверждение

Червь Беклемишева

- *Червь* будем называть произвольную цепочку натуральных чисел.
- *Нос* червя – последний элемент цепочки.
- *Голова* червя – максимальный конец цепочки (включая нос), все элементы которого не меньше носа.
- *Хвост* червя – оставшаяся начальная часть последовательности (хвост может быть пустым).
- В примерах голова – красная (нос – тёмно-красный), хвост – зелёный:

(а) 7 6 1 2 3 4 6 5 4

(б) 7 6 1 2 3 4 6 3 4

(в) 7 6 1 2 3 4 6 3 0 1 0 0 0

(г) 3 7 6 7 8 9 8 4 6 3 3 4 3

Истинное, но не доказуемое в PA утверждение

Эволюция червя

- Эволюция червя происходит по шагам. После каждого шага заново определяем, где у червя хвост, голова, нос.
- Если нос равен 0, то отрезаем его, и на следующем шаге цепочка становится на 1 короче.
- Если на $(k-1)$ -м шаге нос не равен 0, то на k -м шаге к голове червя приделываем ещё k копий головы и в каждой из $(k+1)$ копий нос уменьшаем на 1.

• Пример 1:

$$w_0 = \mathbf{0}$$

$$w_1 = \Lambda$$

Пример 2:

$$w_0 = \mathbf{1}$$

$$w_1 = \mathbf{0\ 0}$$

$$w_2 = \mathbf{0}$$

$$w_3 = \Lambda$$

Истинное, но не доказуемое в PA утверждение

Эволюция червя. Пример 3.

- $w_0 = 2$
- $w_1 = 11$
- $w_2 = 101010$ $w_3 = 10101$ $w_4 = 101000000$
- $w_5 = 10100000$ $w_6 = 1010000$
- $w_7 = 101000$ $w_8 = 10100$
- $w_9 = 1010$
- $w_{10} = 101$
- $w_{11} = 100000000000000000$
- ...
- $w_{23} = 10$ $w_{24} = 1$ $w_{25} = 00^{25}$
- ...
- $w_{50} = 0$
- $w_{51} = \Lambda$

Истинное, но не доказуемое в РА утверждение

Эволюция червя. Пример 4.

- $W_0 = 3$
- $W_1 = 2\ 2$
- $W_2 = 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1$
- $W_3 = 212120\ 212120\ 212120\ 212120$
- $W_4 = 212120\ 212120\ 212120\ 21212$
- $W_5 = 212120\ 212120\ 212120\ 2121\ 111111$
- $W_6 = (212120)^3 (2121111110)^7$
- $W_7 = (212120)^3 (2121111110)^6 212111111$
- $W_8 = (212120)^3 (2121111110)^6 (2121111110)^9$
- $W_9 = (212120)^3 (2121111110)^6 (2121111110)^8 212111111$
- $W_{10} = (212120)^3 (2121111110)^6 (2121111110)^8 (21211110)^{11}$
- ...

Истинное, но не доказуемое в PA утверждение

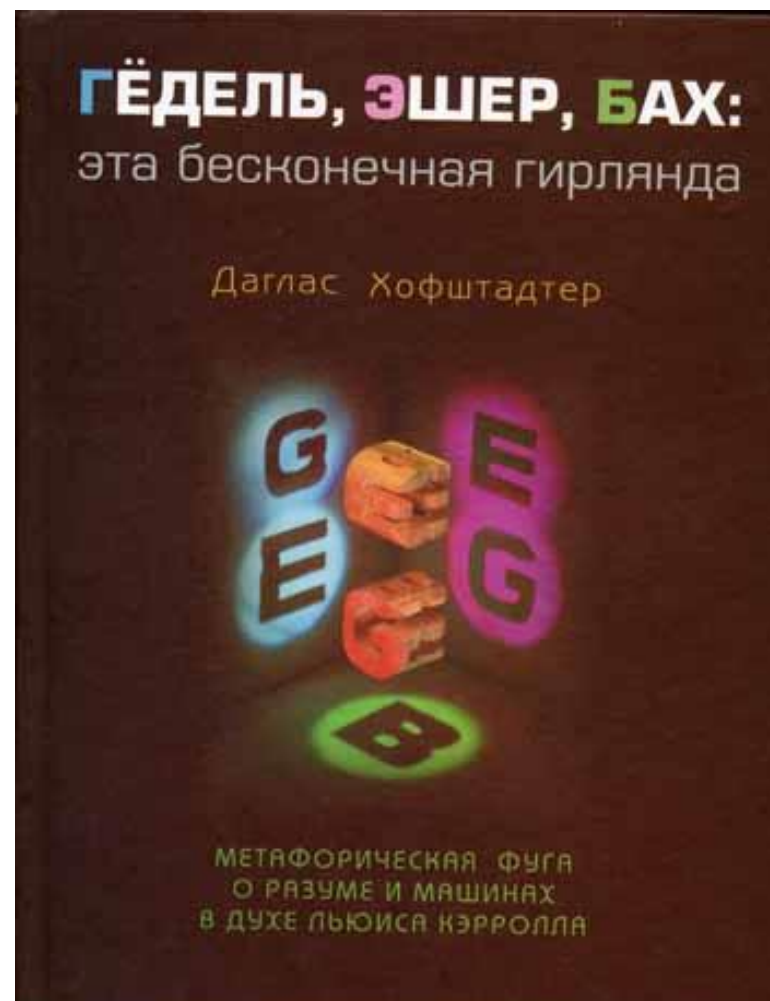
- **Утверждение.** Любой червь в процессе эволюции рано или поздно (но скорее поздно, чем рано) исчезнет (превратится в пустую цепочку).
- **Задача.** Доказать утверждение.
- **Утверждение.** Предыдущее утверждение истинно, но не доказуемо в арифметике Пеано PA.

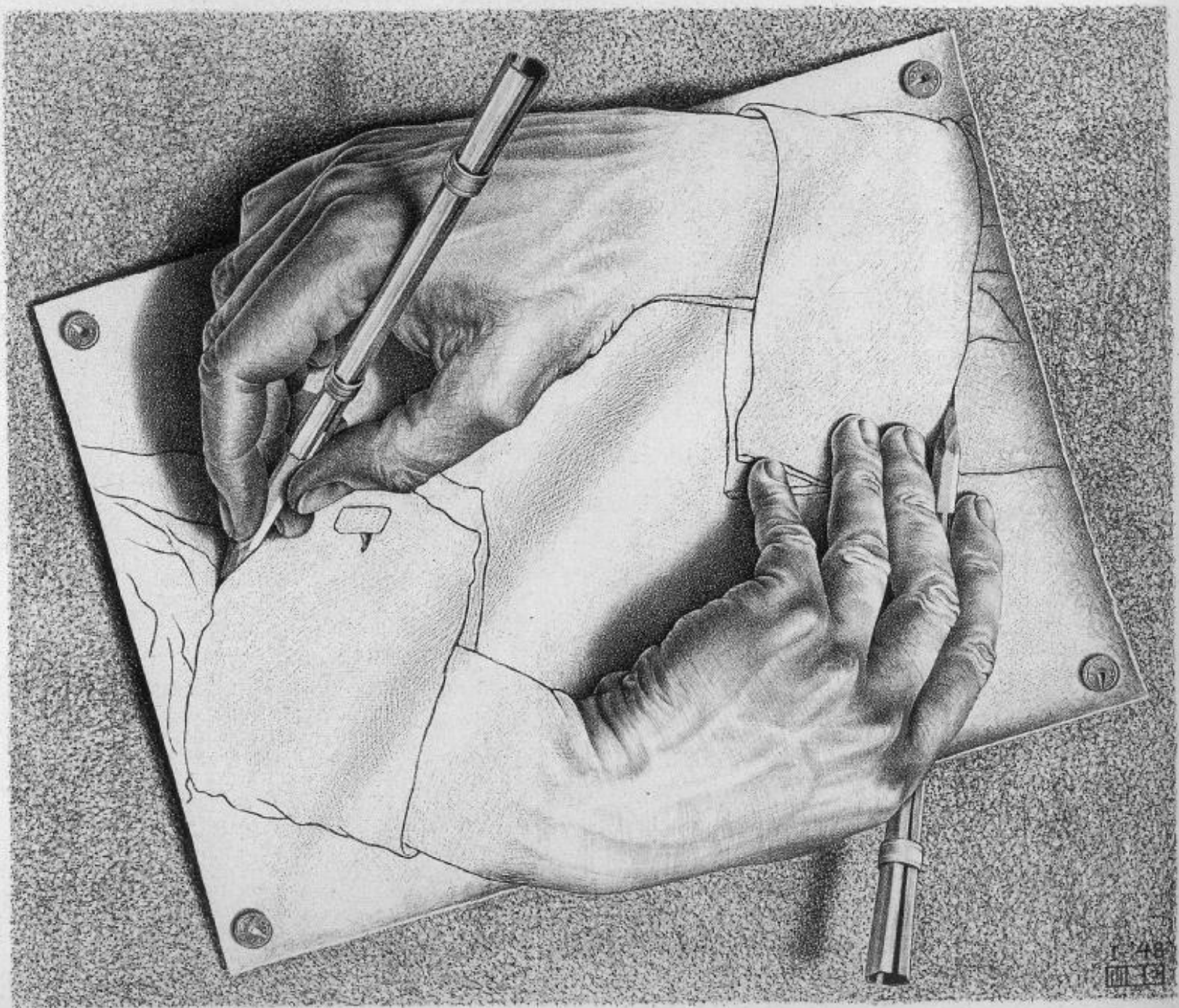
Теорема Гёделя

- Пропасть между доказуемостью и истинностью, между математикой и реальностью



В 1999 году
"Time magazine"
провозгласил
Гёделя
величайшим
математиком
XX века и включил
его в список
"Ста великих людей
столетия".





W. Heine 1873

1. 48
11. 13

1930

- Вена, Венский кружок
- Курт Гедель (род. 1906)
- Диссертация Геделя (1929) – теорема о полноте

1930

- Kurt Gödel Теорема о неполноте (лето 1930), разговор во вторник, 26 августа, в Cafe Reichsrat, в котором участвует Карнап (рассказавший об этом в своем дневнике) и, возможно, еще пара членов Венского кружка

1930

- Д. Гильберт родился (в 1862 г.) под Кенигсбергом (Wehlau – Знаменск), возможно, в самом Кенигсберге (Калининграде)
- 5-7 сентября International Conference on the Epistemology of the Exact Sciences (Königsberg).
 - В нем участвуют виднейшие специалисты по логике и основаниям математике (в частности, члены Венского кружка)
- 5 сентября Доклад Дж. Фон Неймана о Программе Гильберта
- 6 сентября выступление Геделя с теоремой о полноте
 - Воспринято, как очевидное (так мы исчисление и строили)
- 7 сентября заключительный круглый стол. Замечание Геделя с теоремой о неполноте.
 - Не замечено никем, кроме фон Неймана
- 8 сентября – открытие Съезда немецких ученых и врачей. Знаменитое выступление Гильберта: в математике не может быть непознаваемого, всякая проблема будет решена.

1930

- Не верьте тем, кто сегодня философствуют и предсказывают падение культуры и неизбежность непознаваемого (ignorabimus).
- Для нас, как и для всех естественных наук не существует непознаваемого. Нашим девизом должно быть:
- Мы должны знать - мы будем знать!

Задача. Как быть?