Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 7

Алексей Львович Семёнов

План

- Теория $\Gamma_{\mathbb{N}}$ – завершение
- У каких теорий есть модель?
- Нормальные теории.

Дискретный порядок с наименьшим

M – произвольная модель теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$, $a, b \in M$.
a, b *близки* – $\{c \in M | a \leqslant c \leqslant b (b \leqslant c \leqslant a)\}$ конечно.

Классы эквивалентности – *галактики*, галактика $\tilde{a}$.

Порядок на галактиках: $\tilde{a} < \tilde{b}$ или $\tilde{b} < \tilde{a}$ или $\tilde{a} = \tilde{b}$.

$\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}, \{0, 1, 2, \ldots, <, +, \times\} \rangle$.

Теория $\mathrm{Th}_{\mathbb{N}} \cup \{c \neq i \mid i \in \mathbb{N}\}$ непротиворечива.

$\mathbb{N}^*$ – счётная модель данной теории.

$\mathbb{N}^*$ – *нестандартная арифметика*, c – *нестандартное число*.

Дискретный порядок с наименьшим

$\mathbb{N}^*_<$ получена из $\mathbb{N}^*$ удалением всех отношений, кроме $<$ и константы 0.

$\mathbb{N}^*_<$ – модель теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$. $\langle \mathbb{N}, < \rangle \preccurlyeq \mathbb{N}^*_<$.

Может ли структура $\mathbb{N}^*_<$ оказаться изоморфной $\langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$\widetilde{c}$; $\widetilde{c + c}$; $\exists u (u + u = a + b \vee u + u = a + b + 1)$

Порядок на галактиках $\mathbb{N}^*_<$ совпадает с $\langle [0, +\infty), < \rangle$, причем $\tilde{0}$ соответствует 0 в $\mathbb{Q}$.

Дискретный порядок с наименьшим

M – *правильная* подструктура: $\tilde{a} \subseteq M$ при $a \in M$.

Утверждение. *Любая счётная модель теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$ изоморфна правильной подструктуре структуры $\mathbb{N}^*_<$.*

Эскиз доказательства. Множество галактик любой счётной модели теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$ – не более чем счётное линейно упорядоченное множеством с наименьшем элементом.
Такое множество изморфно подструктуре структуры $\langle [0, +\infty), < \rangle$.

Дискретный порядок с наименьшим

Утверждение. *Любая правильная подструктура M структуры $\mathbb{N}^*_<$ является элементарной подструктурой.*

Если $\bar{a} \in M, \mathbb{N}^*_< \vDash \Phi(\bar{a}, b)$ для некоторого $b \in \mathbb{N}^*_<$, то $\mathbb{N}^*_< \vDash \Phi(\bar{a}, b')$ для некоторого $b' \in M$.

$$\langle \mathbb{N}, < \rangle \vDash \forall \bar{u}(\exists v \Phi(\bar{u}, v) \to \\ \exists v'(\Phi(\bar{u}, v') \wedge \forall w(w < v' \to \neg\Phi(\bar{u}, w))))$$

$\mathbb{N}^*_< \vDash \Phi(\bar{a}, b') \wedge \forall w(w < b' \to \neg\Phi(\bar{a}, w)), b' \in \mathbb{N}^*_<$
Пусть $b' \notin M$. $\psi \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$.
$\psi(a) = a, a \in M; \psi(a)$ – предыдущий $a, a \notin M$.
ψ – автоморфизм $\mathbb{N}^*_<$
$\mathbb{N}^*_< \vDash \Phi(\bar{\psi}(\bar{a}), \psi(b'))$
$\mathbb{N}^*_< \vDash \Phi(\bar{a}, \psi(b')), \psi(b') < b'$.

Дискретный порядок с наименьшим

Утверждение. *Теория* $\Gamma_{\mathbb{N}}$ *полна.*

M_1 и M_2 – две не эквивалентные модели теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$.
Они бесконечны, по теореме Лёвенгейма – Сколема – счётны.
Каждая из них изоморфна правильной подструктуре структуры $\mathbb{N}^*_<$.
Все правильные подструктуры эквивалентны.
Противоречие.

Построение деревьев

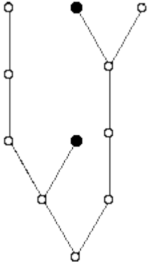
У каких теорий имеется модель?

Хенкин (Генкин): Leon Albert Henkin

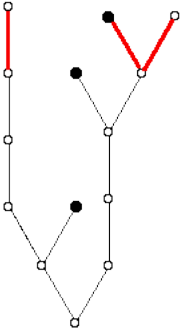
$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_n \subset \ldots.$

корень, сыновья, потомки, листья.

T_i:



T_{i+1}:



Технические соглашения

Дерево – множество слов в {0,1} содержащее начала слов.

Написать теорию деревьев.

Используем только $\vee, \neg, \exists$.
$\forall x \Phi(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x \neg \Phi(x))$

$\Gamma = (\Gamma^+, \Gamma^-)$
M модель $\Gamma \Leftrightarrow$ в M истинны все формулы из Γ^+ и ложны все формулы из Γ^-

$v \in T_i, \Gamma_v$; сыновья v – $v0, v1$
$\Gamma_v^+ \subset \Gamma_{vi}^+, \Gamma_v^- \subset \Gamma_{vi}^-; i = 0, 1$

Теория содержит константы.

Множество констант $\{c_1, \dots, c_n, \dots\}$.

Построение дерева

мертвый лист – $\Gamma_v^+ \cap \Gamma_v^- \neq \varnothing$

$v \in T_i, \Psi \in \Gamma_v^+ \cup \Gamma_v^-$

(i) $\Psi \in \Gamma_v^+$, $\Psi = \neg\Phi$.
$\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^- \cup \{\Phi\}$.

(ii) $\Psi \in \Gamma_v^-$, $\Psi = \neg\Phi$.
(i) с заменой + на -.

(iii) $\Psi \in \Gamma_v^+$, $\Psi = \Phi_0 \vee \Phi_1$.
$\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+ \cup \{\Phi_0\}, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^-$.
$\Gamma_{v1}^+ = \Gamma_v^+ \cup \{\Phi_1\}, \Gamma_{v1}^- = \Gamma_v^-$.

Построение дерева

(iv) $\Psi \in \Gamma_v^-$, $\Psi = \Phi_0 \vee \Phi_1$.
$\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^- \cup \{\Phi_0, \Phi_1\}$.

(v) $\Psi \in \Gamma_v^+$, $\Psi = \exists x \Phi(x)$.
$c \notin \Gamma_v^+ \cup \Gamma_v^-$
$\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+ \cup \{\Phi(c)\}, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^-$.

(vi) $\Psi \in \Gamma_v^-$, $\Psi = \exists x \Phi(x)$.
C – список констант из $\Gamma_v^+ \cup \Gamma_v^-$.
$\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^- \cup \{\Phi(c) | c \in C\}$.

$T^* = \bigcup T_i$

Конечная совместность

(A^+, A^-) *конечна совместна* $\Leftrightarrow$
$(B^+, B^-) \subset (A^+, A^-), B^+, B^-$ – конечны $\rightarrow (B^+, B^-)$
совместна.

Лемма 1 *Если вершине v в дереве T^* соответствует конечно совместная теория, то и одному из сыновей вершины v соответствует конечно совместная теория.*

(iii) $\Phi_0 \vee \Phi_1 \in \Gamma_v^+$. $\Gamma_{v0} = (\Gamma^+ \cup \{\Phi_0\}, \Gamma^-)$ и
$\Gamma_{v1} = (\Gamma^+ \cup \{\Phi_1\}, \Gamma^-)$.
$(A^+ \cup \{\Phi_0\}, A^-) \subset \Gamma_{v0}, (B^+ \cup \{\Phi_1\}, B^-) \subset \Gamma_{v1}$.
$(A^+ \cup B^+ \cup \Phi_0 \vee \Phi_1, A^- \cup B^-) \subset \Gamma$.

(v) $\exists x \Phi(x) \in \Gamma_v^+$. $\Gamma_{v0} = (\Gamma^+ \cup \{\Phi(c)\}, \Gamma^-)$.
$(A^+ \cup \{\Phi(c)\}, A^-)$ – конечно. $(A^+ \cup \{\exists x \Phi(x)\}, A^-) \subset \Gamma$.
Рассмотрите остальные случаи самостоятельно.

Конечная совместность

$v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots$ – *ветвь* $\Leftrightarrow$ v_{i+1} сын v_i.

Лемма 2. *Если вершине v в дереве T^* соответствует конечно совместная теория, то в дереве T^* существует бесконечная ветвь, проходящая через вершину v.*

Выбор формулы

Процедура выбора формулы $F \colon v \to \Phi \in \Gamma_v$

Процедура *корректна* $\Leftrightarrow v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots; \Phi \in \Gamma^+_{v_0} \cup \Gamma^-_{v_0}$ найдется $v_i, F(v_i) = \Phi$

Постройте корректную процедуру выбора формул.

Лемма 3. *Если дерево T^* построено с использованием корректной процедуры выбора и через вершину v проходит бесконечная ветвь, то теория, соответствующая вершине v непротиворечива.*

Построение модели

Бесконечная ветвь $v, v_1, \ldots$.
$A^+ = \bigcup \Gamma^+_{v_i}, A^- = \bigcup \Gamma^-_{v_i}, \Gamma^* = (A^+, A^-)$.
Γ^* совместна.
Носитель M – множество символов констант, входящих в $A^+ \cup A^-$.
$M \models R(a_0, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R(a_0, \ldots, a_n) \in A^+$.
$\Phi \in A^+ \Rightarrow M \models \Phi; \Phi \in A^- \Rightarrow M \models \neg\Phi$.

(0) Φ – атомная формула.

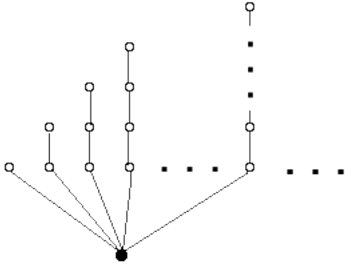
(1) $\Phi = \exists x \Psi(x), \Phi \in A^-$.
$M \models \neg\Psi(c)$ для любого элемента $c \in M$.
Найдется $v_i, \Phi \in \Gamma^-_{v_i}, c \in \Gamma^+_{v_i} \cup \Gamma^-_{v_i}$.
Корректность $\Rightarrow j > i$, в вершине v_j была выбрана Φ.
Из (vi), $\Psi(c) \in \Gamma^-_{v_{j+1}}$.
Индукция.
Рассмотрите остальные случаи самостоятельно.

Следствия

Теорема компактности. *Если теория конечно совместна, то у нее есть модель.*
Γ – конечно совместная теория, T_0 – корень с теорией Γ.
Лемма 2: в T^* есть бесконечная ветвь.
Лемма 3: у теории Γ есть модель.

(0) $T_i = T_{i+1}$, теория противоречива;
(1) в T^* есть бесконечна ветвь, теория непротиворечива;
(2) T^* бесконечно и не содержит бесконечных ветвей.

Следствия



Конечное ветвление ⇔ у каждой вершины конечное число сыновей.

Лемма Кёнига. *В бесконечном дереве с конечным ветвлением есть бесконечный путь.*
Докажите лемму Кёнига.

Перечислимость

Утверждение 1. *Если конечная теория Γ непротиворечива и полна, то существует алгоритм, который по утверждению Φ определяет, следует ли утверждение из теории (отношение следования из Γ разрешимо).*

$\Gamma \models \Phi \Leftrightarrow (\Gamma, \{\Phi\})$ несовместна.
Два дерева: $(\Gamma, \{\Phi\}), (\Gamma, \{\neg\Phi\})$.

Перечислимость

Утверждение 2. *Существует алгоритм, который по конечной теории Γ перечисляет все утверждения, следующие из теории и только их (отношение следования перечислимо).*

Список теорий $\{\Gamma, \Phi_0\}, \ldots, \{\Gamma, \Phi_i\}, \ldots$.
Шаг работы алгоритма: