Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 6

Алексей Львович Семёнов

План

- Повторение. Теория моделей: начальные понятия.
- Теория моделей: простейшие инструменты.
- Теория $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.
- Теория $\Gamma_{\mathbb{N}}$.

Повторение

Замкнутая формула или *утверждение* – формула без свободных переменных.

Теория – множество утверждений.

$M = \langle D, \Sigma, \mathbf{Зн} \rangle$ — структура, Φ — утверждение.
$M \vDash \Phi$ – формула Φ *истинна* в M.

Модель теории – структура, в которой выполнены все формулы теории.

Формула $\Phi(\bar{x})$ содержит свободные переменные,
$\bar{a} \in D$.
$M \vDash \Phi(\bar{a})$ – Φ истинна в M, если вместо переменных x_i подставлены элементы a_i.

Повторение

Противоречивая (несовместная) теория –
теория, у которой нет моделей.

Утверждение Φ *следует* из теории Γ ($\Gamma \models \Phi$) –
формула Φ истинна в любой модели теории Γ.

Является ли отношение следования разрешимым?

Является ли отношение следования перечислимым?

Повторение

Изоморфные структуры.

Th_M – теория структуры.
Элементарная эквивалентность:
$M_0 \equiv M_1 \Leftrightarrow Th_{M_0} = Th_{M_1}$.

Элементарная подструктура и элементарное расширение. $M_0 \preccurlyeq M_1$:
$M_0 \subseteq M_1; M_0 \vDash \Psi(\bar{a}) \Leftrightarrow M_1 \vDash \Psi(\bar{a}), \bar{a} \in M_0$.

$Th_M(M)$

Повторение

Теория Γ *полна*, если для любого утверждения Φ в той же сигнатуре выполнено $\Gamma \models \Phi$ или $\Gamma \models \neg\Phi$.

Почему любую совместную теорию можно расширить до полной теории?
Th_M

Теория полна тогда и только тогда, когда две любые ее модели эквивалентны.

Повторение

Теория $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.

$\forall u(\neg(u < u))$
$\forall u, v(u < v \vee v < u \vee u = v)$
$\forall u, v, w((u < v \wedge v < w) \to u < w)$
$\forall u, v(u < v \to \exists w(u < w < v))$ – плотность
$\forall u \exists v(v < u)$ – неограниченность снизу
$\forall u \exists v(u < v)$ – неограниченность сверху

Примеры моделей $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.
Челночная процедура.
Верно ли, что $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle$
Полна ли теория $\Gamma_{\mathbb{Q}}$?
Бывают ли модели теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, равномощные $\mathbb{R}$, но не изоморфные $\langle \mathbb{R}, < \rangle$?

Инструменты

Критерий Тарского – Вота.
Пусть M_1 *– подструктура структуры M. Следующие два условия эквивалентны:*
(1) M_1 *– элементарная подструктура структуры M*
(2) для любой формулы $\Phi(\bar{x}, y)$ *и любых элементов* $\bar{a} \in M_1$ *если*
$M \vDash \Phi(\bar{a}, b)$ *для некоторого* $b \in M$*, то*
$M \vDash \Phi(\bar{a}, b')$ *для некоторого* $b' \in M_1$*.*

$(1) \Rightarrow (2)$.
$\big(M \vDash \Phi(\bar{a}, b)$ для некоторого $b \in M\big) \Rightarrow \big(M \vDash \exists u \Phi(\bar{a}, u)\big)$
$\Rightarrow \big(M_1 \vDash \exists u \Phi(\bar{a}, u)\big) \Rightarrow \big(M_1 \vDash \Phi(\bar{a}, b')$ для некоторого
$b' \in M_1\big) \Rightarrow \big(M \vDash \Phi(\bar{a}, b')\big)$.

Инструменты

Критерий Тарского – Вота. $(2) \Rightarrow (1)$.
$M_1 \vDash \Phi(\bar{a}) \Leftrightarrow M \vDash \Phi(\bar{a}), \bar{a} \in M_1$
Φ атомная, $\Phi = \neg\Psi, \Phi = \Psi_1 \vee \Psi 2$
$\Phi = \exists u \Psi(\bar{x}, u)$

$\Rightarrow$. $M_1 \vDash \exists u \Psi(\bar{a}, u)$
$M_1 \vDash \Psi(\bar{a}, b')$ для некоторого $b' \in M_1 \Rightarrow$
$M \vDash \Psi(\bar{a}, b') \Rightarrow M \vDash \exists u \Psi(\bar{a}, u)$

$\Leftarrow$. $M \vDash \exists u \Psi(\bar{a}, u)$.
$M \vDash \Psi(\bar{a}, b)$ для некоторого $b \in M \Rightarrow$
$M \vDash \Psi(\bar{a}, b')$ для некоторого $b' \in M_1 \Rightarrow$
$M_1 \vDash \Psi(\bar{a}, b') \Rightarrow M_1 \vDash \exists u \Psi(\bar{a}, u)$

Инструменты

Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарной подмодели. *Любая беконечная структура с конечной или счётной сигнатурой содержит счётную элементарную подструктуру.*

Цепочка подструктур $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M$.
M_0 содержит все константы.
$\Phi(\bar{x}, y), \bar{a} \in M_i$.
$M \vDash \Phi(\bar{a}, b), b \in M$ – помещаем в M_{i+1} некоторое b.
$M' = \bigcup M_i$. $M \vDash \Phi(\bar{a}, b), \bar{a} \in M'$.
$\bar{a} \in M_i \Rightarrow M \vDash \Phi(\bar{a}, b'), b' \in M_{i+1}$

Инструменты

Теорема компактности. (Гёдель, Мальцев). *Если любое конечное подмножество теории непротиворечиво, то теория непротиворечива.*

Как доказать теорему компактности?

Следствие. *Если утверждение является следствием теории, то это утверждение является следствием некоторого конечного подмножества данной теории.*

Как вывести следствие из теоремы компактности?

Инструменты

Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарном расширении. *Для любой бесконечной структуры с конечной или счётной сигнатурой существует элементарное расширение сколь угодно большой мощности.*

$M = \langle D, \Sigma, \textbf{Зн} \rangle$. Теория $\Gamma = Th_M(M) \cup \{c \neq d\}$.
Теория Γ совместна.
$M' \models \Gamma \Rightarrow M'$ элементарное расширение M.
Мощность M' не меньше мощности множества новых констант.

Плотный порядок без первого и последнего

Утверждение. *Теория* $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ *полна.*

M_1 и M_2 – две не эквивалентные модели теории $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.
Они бесконечны.
По тереме Лёвенгейма – Сколема, можно считать, что M_1 и M_2 счётны.
Они изоморфны (челнок), то есть эквивалентны.
Противоречие.

Теория *категорична* в счётной мощности (ω-*категорична*) — все счётные модели изоморфны.

Плотный порядок без первого и последнего

Признак Лося – Вота. *Совместная теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей и категоричная в счётной мощности, полна.*

Категоричность в произвольной мощности.
Обобщение признака Лося – Вота.

Непротиворечивая теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей и категоричная в некоторой бесконечной мощности, полна.

Дискретный порядок с наименьшим

<u>Теория $\Gamma_{\mathbb{N}}$:</u>
$\forall u(\neg(u < u))$
$\forall u, v(u < v \vee v < u \vee u = v)$
$\forall u, v, w((u < v \wedge v < w) \to u < w)$
$\forall u(0 < u \vee u = 0)$
$\forall u \exists v(u < v \wedge \forall w(u < w \to (v = w \vee v < w)))$
$\forall u(u \neq 0 \to \exists v(v < u \wedge (\forall w(w < u \to w = v \vee w < v))))$

Является ли теория $\Gamma_{\mathbb{N}}$ ω-категоричной?

$s(x, y) \Leftrightarrow x < y \wedge (\forall w(x < w \to (y = w \vee y < w)))$
$\forall u \exists v(s(u, v))$
$\forall u(u \neq 0 \to \exists v(s(v, u)))$
$s(x, y)$ и $s(x, z) \Rightarrow z = y$
$y = x' \Leftrightarrow s(x, y)$ – *следующий за* x

Дискретный порядок с наименьшим

M – произвольная модель теории $\Gamma_{\mathbb{N}}$, $a, b \in M$.
a, b *близки* – $\{c \in M | a \leqslant c \leqslant b (b \leqslant c \leqslant a)\}$ конечно.

Классы эквивалентности – *галактики*, галактика $\tilde{a}$.

Как устроена галактика $\tilde{0}$? Как устроены все прочие галактики?

Порядок на галактиках: $\tilde{a} < \tilde{b}$ – $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ и $a < b$.

Корректно ли определен порядок? Будет ли порядок на галактиках линейным? Есть ли среди галактик наименьшая?

Дискретный порядок с наименьшим

$\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}, \{0, 1, 2, \ldots, <, +, \times\}\rangle$.
$R_+(n_1, n_2, n_3) \Leftrightarrow n_1 + n_2 = n_3$
$R_\times(n_1, n_2, n_3) \Leftrightarrow n_1 \cdot n_2 = n_3$
$a + b + c = d \Rightarrow \exists u(R_+(a, b, u) \wedge R_+(u, c, d))$

Теория $\mathrm{Th}_{\mathbb{N}} \cup \{c \neq i \mid i \in \mathbb{N}\}$ непротиворечива.
$\mathbb{N}^*$ – счётная модель данной теории.