Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 2

Алексей Львович Семенов

План

- Программа Гильберта
- Аксиомы теории множеств (повторение и продолжение)
- Трудности с полнотой
- Логика высказываний. Синтаксис и семантика

Построение математики

- Программа Гильберта
- Математика, как игра по правилам
- Аксиоматическая теория
- Теория множеств:
  - Кантор
  - Больцано

Программа Гильберта построения математики и математического исследования математической деятельности (повторение)

- Математика представляется как система
  - аксиом – утверждений, в которые мы верим и
  - правил доказательства – получения новых утверждений.
- Практика математической деятельности должна убеждать (и убеждает) нас в том, что, выбранная система позволяет строить все нужные доказательства.
  Всякое математическое утверждение можно доказать или опровергнуть (**полнота**).
- Некоторые математические доказательства являются «особенно надежными и убедительными» (например, арифметические вычисления с целыми числами).
  Используя только их, можно убедиться в том, что выбранная система не позволяет получить противоречий.
  (**непротиворечивость**)

Полнота и непротиворечивость (повторенеие)

- Полнота – желательна
  - Гильберт: «Это убеждение в разрешимости каждой математической проблемы является для нас большим подспорьем в работе; мы слышим внутри себя постоянный призыв: вот проблема, ищи решение. Ты можешь найти его с помощью чистого мышления; ибо в математике не существует Ignorabimus [непознаваемого]!»
- Непротиворечивость - обязательна
  - Противоречие – нельзя «локализовать» в обычных системах рассуждения, оно немедленно распространяется (лед в «Колыбели для кошки»)
  - Могло бы оказаться, что и полноту математики можно также доказать с помощью простых, понятных и убедительных рассуждений.

Программа Гильберта

1. Успешно реализована

- Аксиоматическая теория множеств является основанием современной математики
- Н. Бурбаки – середина XX в. (1930-е, в основном 1950 – 60-е гг.)

2. Провалилась

- *Математика – не полна*
- *Непротиворечивость невозможно установить*
- Курт Гедель (28.04.1906 – 14.01.1978) 1930-е гг.

Математика (теория множеств). Элементы аксиоматического построения (неформальное введение)

- **Логические символы и их смысл (семантика)**
- Логические константы: символы И (истина), Л (ложь), или символы 0, 1. Множество **B**.
- Логические операции:
  $\neg$ (не, отрицание),
  $\wedge$ (и, конъюнкция),
  $\vee$ (или, дизъюнкция),
  $\rightarrow$ (следует, импликация),
  $\equiv$ (эквивалентность),
  применяются к константам 0 (Л) и 1 (И)
- Кванторы $\exists \boldsymbol{x}$ (существует $\boldsymbol{x}$), $\forall \boldsymbol{y}$ (для любого $\boldsymbol{y}$)
- Символы языка теории множеств:
- **$\in$ - принадлежность , $=$ - равенство**

Таблица логических операций

A	B	¬A	A∧B	A∨B	A→B	A≡B
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

- Кванторы: многоместные (в том числе – «бесконечноместные») конъюнкция и дизъюнкция

Примеры аксиом теории множеств

$\forall \boldsymbol{u} \forall \boldsymbol{v}\ (\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \equiv \forall \boldsymbol{w}\ (\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{v}))$

[аксиома равенства]

<u>Существование множеств</u>

- $\exists \boldsymbol{x}\ \forall \boldsymbol{y}\ \neg (\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{x})$

  [Аксиома пустого множества]

- $\forall \boldsymbol{u} \forall \boldsymbol{v}\ \exists \boldsymbol{s} \forall \boldsymbol{w}\ (\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{s} \equiv (\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \vee \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}))$

  [Аксиома пары]

- Пример: существует {Ø} – непустое множество.

Построение натуральных чисел

Один из способов

- Построение каждого отдельного числа:
  - 0 – это ∅
  - 1 – это {0}
  - 2 – это {0,1} = {0,{0}}

  ……Операция $S(x) = x \cup \{x\}$
- Существование множества всех натуральных чисел – аксиома.
- Задача. Написать аксиому существования множества натуральных чисел.

Какие еще аксиомы нужны?

- Существование множества всех подмножеств данного множества:

  $\forall u \exists s \forall v(\forall w(w \in v \to w \in u) \equiv v \in s)$ [Аксиома степени]

  Множество всех подмножеств множества ***u*** можно отождествлять с $\mathbf{B}^{\boldsymbol{u}}$.

- Что нужно (какие аксиомы) для существования множества действительных чисел?
- Что нужно для доказательства свойств («аксиом») действительных чисел?

Пределы расширения

- Существует множество всех объектов с данным свойством – Аксиома?
- Для каждого свойства Ф(x) добавить аксиому:

  $\exists \boldsymbol{s} \forall \boldsymbol{v}\ (\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{s} \equiv \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}\ ))$
- Что такое Ф(x)?
- Можно рассмотреть только свойства, определяемые формулами.
- Формула Ф(x):

  $\neg\ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x})$ [Диагональ Рассела]
- Задача. Может ли существовать требуемое ***s*** ?
- Исправляем
- Для каждой формулы Ф:

  $\forall \boldsymbol{u} \exists \boldsymbol{s} \forall \boldsymbol{v}\ (\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{s} \equiv (\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}\ )))$

  [Аксиомы выделения]

Удалось ли нам избежать противоречий?

- Теорема Кантора – Бернштейна.

  Пусть существует биекция между множеством *A* и подмножеством множества *B*, а также биекция между множеством *B* и подмножеством множества *A*. Тогда множества *A* и *B* – равномощны.

- **Задача (из первой лекции)**. Доказать Теорему Кантора – Бернштейна.

Теорема Кантора

Неравномощность множества и множества всех его подмножеств

•**Д (полуформальное).**

•Визуализация – диагональ.

•Приведем к противоречию существование функции f , отображающей множество A на множество всех его подмножеств.

•Будем писать $f(x) = y$ вместо $< x; y > \in f$, и $x \notin y$ вместо $\neg (x \in y)$

•Формула $\Phi(x)$:

$x \notin f(x)$

• $\forall \boldsymbol{u} \exists \boldsymbol{s} \forall \boldsymbol{v} (\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{s} \equiv (\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v})))$
[Аксиомы выделения]

•Возьмем A в качестве $\boldsymbol{u}$. Тогда существует $\boldsymbol{v}$ обозначим его B:

$\forall x (x \in B \equiv (x \in A \wedge x \notin f(x)))$. Видно, что $B \subset A$

•По предположению для некоторого $b \in A$ выполнено $f(b) = B$

•$b \in B \equiv (b \in A \wedge b \notin f(b))$, т. е. $b \in B \equiv (b \in A \wedge b \notin B)$.

•Противоречие.

Границы математики

- Диагональ Рассела – противоречие.
- Диагональ Кантора – теорема.
- Множество действительных чисел не равномощно множеству натуральных.
- Существует ли бесконечное множество действительных чисел, не равномощное ни всему множеству действительных чисел, ни множеству натуральных чисел?
- Кантор считал, что нет (Гипотеза Континуума) – содержание Первой Проблемы Гильберта.

Задачи нашего курса

- Построить систему доказательств
- Построить систему аксиом теории множеств
- Изучить полноту и непротиворечивость для построенной системы или ее частей
- Будут рассмотрены произвольные системы доказательства, и еще более общие математические объекты – исчисления
- Вычислимость…
- В наших рассмотрениях мы (как и других разделах математики) используем «неформальную» математику (теорию множеств)

Логика высказываний

Первый из логических языков нашего курса (первый шаг в построении системы доказательств для Математики).

- Последовательность имен высказываний

  A_1, A_2,… .

- Определение формулы (логики высказываний).

1. Логические константы 0 и 1 – формулы.
2. Если А – имя высказывания, то А – формула.
3. Если Φ, Ψ – формулы, τ – связка: $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\rightarrow$ (импликация), $\equiv$ (эквивалентность), то $\neg$Φ, (Φ τ Ψ) – формулы.

- **Индуктивное определение (построение)**
- **«Порочный круг» (цикл в определении –** *circulus in definiendo*) **– определение понятия через его же само?**

Круг в определении

- «СЕПУЛЬКИ — важный элемент цивилизации ардритов (*см.*) с планеты Энтеропия (*см.*). См. СЕПУЛЬКАРИИ». «СЕПУЛЬКАРИИ — устройства для сепуления (*см.*)». «СЕПУЛЕНИЕ — занятие ардритов (*см.*) с планеты Энтеропия (*см.*). См. СЕПУЛЬКИ».

- ***Лем С. «Звёздные дневники Ийона Тихого. Путешествие четырнадцатое.»***

Синтаксис логики высказываний.

- **Примеры формул:**
- A_2, $(A_1 \vee A_3)$, $\neg A_1$
- $((A_1 \vee A_4) \equiv \neg A_1)$,
- **Как формула строилась:**
- A_1
- A_4
- $(A_1 \vee A_4)$
- A_1
- $\neg A_1$
- $((A_1 \vee A_4) \equiv \neg A_1)$
- **Задача**. Как проверить, является ли слово формулой?
- Например, формулы ли: $)))A_3$, $((A_1 \wedge A_2))$?

Логика высказываний

- Семантика.
- ***B*** = {0,1}.
- Семантика связок (таблица была):

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \equiv B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Логика высказываний. Семантика

- ***B*** $^{\mathbf{N}}$ **-** множество бесконечных последовательностей из 0 и 1.
- Пояснение:

  Выбор элемента $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_i \ldots \in \boldsymbol{B}^{\mathbf{N}}$ означает фиксацию значений имен высказываний $A_1,\ldots, A_i,\ldots$ (присваивание)
- Всякий элемент $\alpha \in \boldsymbol{B}^{\mathbf{N}}$ – *интерпретация*.
- Фиксируем интерпретацию α.
- Замечание. Нам удобно задавать значения сразу для всех имен высказываний.

Логика высказываний. Семантика

Значение формулы при данной интерпретации $\alpha \in$ **B** $^{\mathbf{N}}$.

Вычисление индукцией по построению:

1. Значением логической константы является она сама.
2. Значением имени высказывания A_i является α_i .
3. Значением:

- формулы **($\neg\Phi$)** является отрицание значения Φ, т.е.

Зн ($\neg\Phi$) = 1- Зн Φ.

- формулы **($\Phi\tau\Psi$), где $\tau\in\{\to,\wedge,\vee,\equiv\}$** является результат применения τ к значениям формул **Φ, Ψ**.

Значение формулы **–** функция ***B*** $^{\mathbf{N}} \to$ ***B.***

Наибольший номер имени высказывания в формуле равен ***n.***

формула задает функцию ***B*** $^{n} \to$ ***B.***

Логика высказываний. Семантика

- Нахождение значения
- **Задача**. Почему процесс заканчивается?
- **Задача**. Почему результат процесса однозначно определен? (однозначность анализа)
- Может ли быть, например:

$$\Phi = (\Phi_1 \wedge \Psi_1) = (\Phi_2 \rightarrow \Psi_2)?$$

Булевы функции

- Функции $\boldsymbol{B^n \to B}$.

- Формула задает функцию $\boldsymbol{B^n \to B}$.
- **Задача.** Сколько существует функций: $\boldsymbol{B^n \to B}$?
- **Задача**. Всякую ли функцию можно задать подходящей формулой?

Лишние скобки

- **Задача**. Придумать разумные правила опускания и восстановления скобок.