Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Алексей Львович Семенов

План

- Место математической логики и теории алгоритмов в современном мире
- Анализ математической деятельности средствами математики. Программа Гильберта
- Базовый инструмент современной математики – теория множеств
- Примеры аксиом теории множеств

Чем занимается математика:

- Описанием, моделированием, предсказанием реальности
- Небесная механика…

Человеческая деятельность:

В математике

- Доказательство теорем
- Определение математических понятий
- Описание отношений между математическими объектами
- Построение математических алгоритмов, установление соответствия между описанием требуемого результата и алгоритмом, предназначенным для достижения этого результата (доказательство правильности)

В реальности

- Получение следствий из экспериментально установленных утверждений, из гипотез и т. п.
- Проектирование устройств (механических, электронных и т. д.) с заданными свойствами и функциями.
- Создание и использование формальных предписаний (программ) для реальных устройств

Математическая логика и теория алгоритмов дают (математические, точные) критерии правильности

МЛиТА: Результаты, относящиеся к:

- Множествам и отношениям, которые можно описать на том или ином языке
- Множествам доказуемых формул
- Множествам истинных формул (имеется фундаментальная разница с п.2)
- Множествам математических структур, в которых истинны формулы из заданного множества
- Классам функций, которые вычисляются алгоритмами
- Существованию алгоритма, выясняющего истинность или доказуемость формул
- Сложности вычислений
- Сложности объектов
- и др.

Развитие цивилизации

- Обработка материи
- Получение и использование энергии
- Переработка информации (XX век)
- становится основной деятельностью
- результаты, понятия, построения МЛиТА – образуют фундамент

История

Вопросы основания математики:

- Что значит, что математическое утверждение **доказано**?
- Что значит **определить** математическое отношение?
- Что значит, что математическая функция **вычислима**?

Ответы дает **метаматематика**

Давид Гильберт (23.01.1862 — 14.02.1943)

Родился в Вельхау, Пруссия
(ныне Знаменск Калининградской области)

Второй международный математический конгресс, Париж, 1900

23 Проблемы Гильберта

I, II, X проблемы
относятся к математической логике и теории алгоритмов

Из семи Проблем тысячелетия (2000) первая также относится к нашему предмету (ее не было среди проблем Гильберта)

Первые ответы:

<u>Конец XIX в.:</u>

Готлоб Фреге (8.11.1848 — 26.07.1925)**.,**
Давид Гильберт и др.:

- **Математическое доказательство**

– текст (цепочка формул или фигур), построенный по математически определяемым правилам

Георг Кантор (3.03.1845 — 6.01.1918)

Родился в Санкт-Петербурге

- **Первичная система понятий математики**

- теория множеств

<u>Начало XX в.</u>

- **Эрнст Цермело** (27.7.1871 – 21.5.1953)

аксиоматическая теория множеств (1908)

В курсе будет дано определение математического доказательства

Организационные замечания

- http://lpcs.math.msu.su/vml2015/, то же для 2014
- Н. К. Верещагин, А. Шень, Лекции по математической логике и теории алгоритмов, изд. МЦНМО (mccme.ru)
- И. А. Лавров, Л. Л. Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов
- Математическая деятельность
- Консультации
- Экзамен
- Просеминар

Построение математики. Неформальная теория множеств (напоминание)

- Задания множеств:

  {2, 14, 5.4}, {x| x – действительное число и sin(x)>0}.

- принадлежность элемента множеству **∈,** пустое множество ∅, включение множеств ⊂ (нестрогое, допускающее совпадение) , подмножество, объединение ∪, пересечение ∩, разность \,.
- Упорядоченная пара $< x; y >$:

$< x; y >=< x'; y'> \rightarrow (x = x'$ **и** $y = y')$

- Произведение X X Y – множество всех упорядоченных пар $< u; v >$, где $u \in X$ и $v \in Y$.
- n-ая степень X^n множества X. X^1 – *это* X.
- Отношение между множествами X, Y – любое подмножество R их произведения X x Y.
- Обратное отношение R^{-1}
- n -местное отношение на множестве X – любое подмножество X^n.

- Отношение f между X и Y называется функцией из X в Y если из совпадения первых компонентов f вытекает совпадение вторых. Обозначения $f(x)=y$, $f : x \vdash\!\!\rightarrow y$
- Областью определения функции называется множество первых ее компонентов. Множество значений, обратная…
- Если область определения совпадает с X, то функция отображает X в Y

  Y^X - множество всех функций, отображающих X в Y.
- биекция между X и Y (из X в Y), изоморфизм X и Y:
  - f отображает X в Y
  - из совпадения вторых компонентов элементов f вытекает совпадение первых,
  - вторые элементы f образуют все множество Y .
- Изоморфные множества - равномощные.
- Вложение – изоморфизм подмножеству.

- Множество называется счетным, если оно равномощно натуральному ряду.
- Конечные множества можно сравнивать по величине. Вложение – изоморфизм подмножеству.
- Как быть с бесконечными?
- **Задача**. Доказать, что всякое подмножество натурального ряда равномощно:
  - или его начальному отрезку,
  - или всему натуральному ряду.
- Часть может быть изоморфна целому, Одно из первых открытий теории множеств.
- Галилео Галилей (15.02. 1564 — 08.01.1642)

Галилей


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con una Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

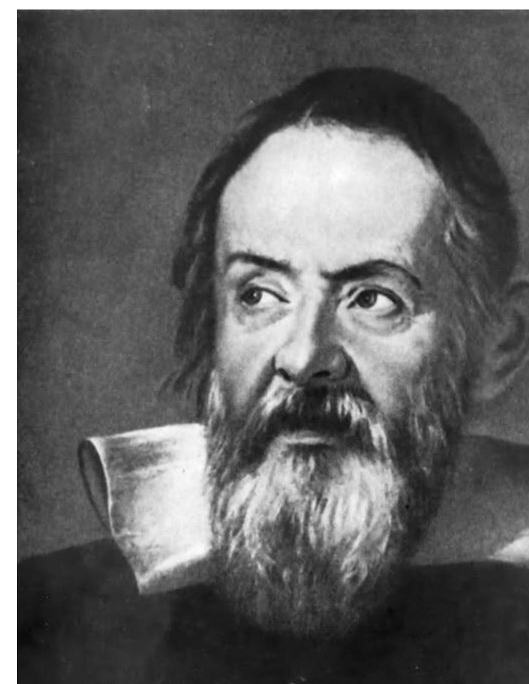
IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению,

синьора

Галилео Галилея Линчео,

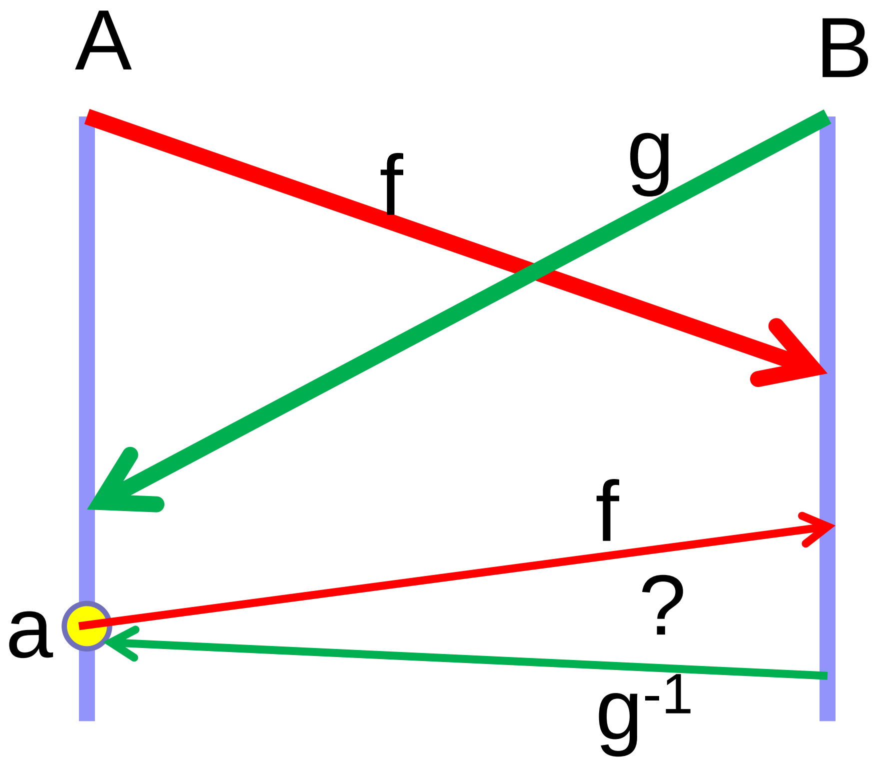
философа и первого математика светлейшего великого герцога тосканского



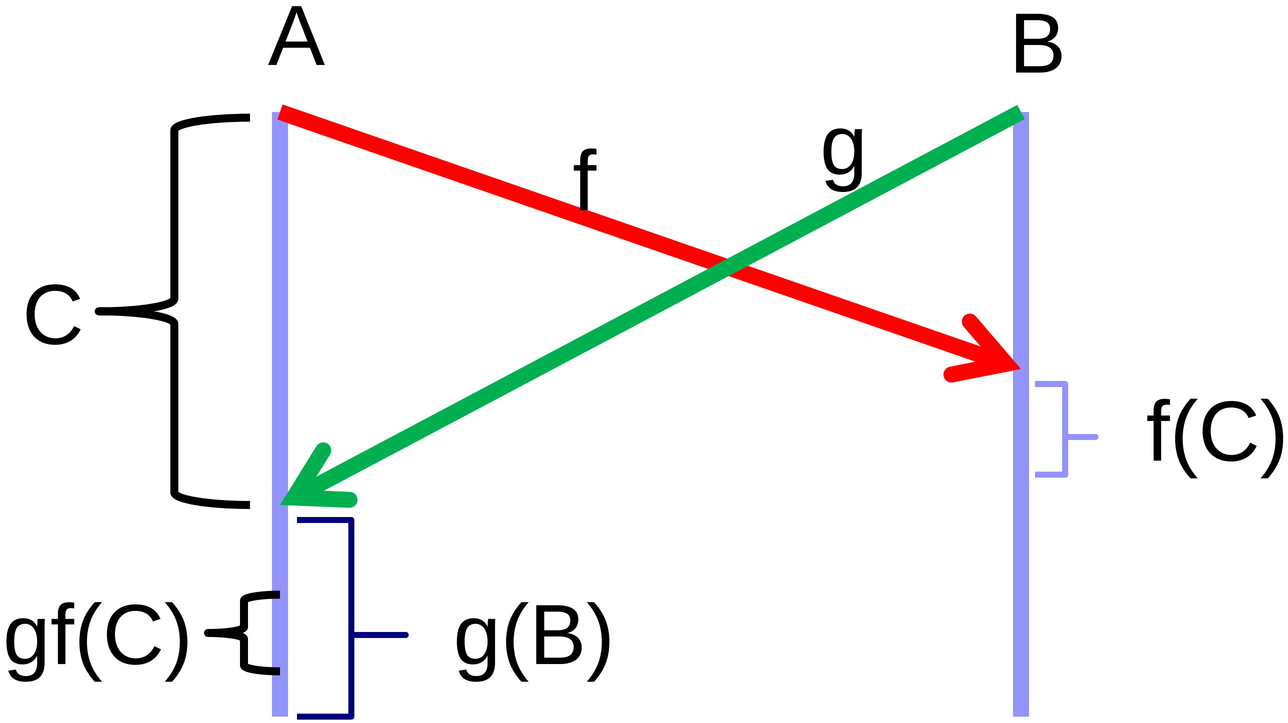
- **Сальвиати**. …количество всех чисел вместе — квадратов и не квадратов — больше, нежели одних только квадратов; не так ли?
- **Симпличио**. Ничего не могу возразить против этого.
- **Сальвиати**. квадратов столько же, сколько существует корней, так как каждый квадрат имеет свой корень и каждый корень свой квадрат; ни один квадрат не может иметь более одного корня и ни один корень более одного квадрата… [изоморфизм]
- Я не вижу возможности никакого другого решения, как признать, что свойства равенства, а также большей и меньшей величины, не имеют места там, где дело идет о бесконечности, и применимы только к конечным количествам.
- Поэтому, когда синьор Симпличио предлагает мне неравные линии и спрашивает меня, как может быть, чтобы в большей из них не содержалось большего количества точек, чем в меньшей, то я отвечаю ему, что их там не больше, не меньше и не одинаковое количество, но бесконечное множество в каждой. [несравнимость бесконечных множеств]

- Теорема Кантора – Бернштейна.
  Пусть существует биекция между множеством *A* и подмножеством множества *B*, а также биекция между множеством *B* и подмножеством множества *A*. Тогда множества *A* и *B* – равномощны.
- **Задача**. Доказать Теорему Кантора – Бернштейна.

Соображение



Соображение



- **Задача**. Бывают ли разные бесконечности? (Галилей)
- **Задача**. Можно ли сравнить любые множества по мощности, то есть верно ли, что для любых A и B, или A равномощно подмножеству B, или B равномощно подмножеству A?

Логика.

- Логические константы **B**={0,1}, 0 – истина, 1 - ложь
- Свойства – функции, принимающие только значения 0 и 1. Всякое свойство задает отношение – множество элементов, на которых его значение = 1. Любая функция из $\mathbf{B}^{X}$ называется характеристической (на X)
- **Задача**. Построить изоморфизм между множеством характеристических функций на X и множеством подмножеств множества X (множеством одноместных отношений на X).

- **Задача**. Доказать, что множество подмножеств любого множества ему не изоморфно.
- **Идея решения** [Диагональ Кантора]. Для счетного случая

Диагональ несчетности

Аргумент № функции	0	1	2	3	4	……..
0	1	0	0	1	0	
1	1	1	0	1	0	
2	1	0	0	1	1	
3	0	0	0	1	0	
4	0	1	0	1	0	

……………………………………………………………………………

Функция, которой нет в таблице – это
1- *t(i,i)*, то есть **не** *t(i,i)*,
нули заменили на единицы, единицы – на нули.

als@maildisk.ru