Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 9

Алексей Львович Семенов

Логика высказываний

Синтаксис.

Логические константы (логические значения):

0 (Л, Ложь, F), 1 (И, Истина, T).

Упорядоченный (счетный) алфавит *имен высказываний*:

$A_1, A_2, \ldots$

Логические связки:

$\neg$ - отрицание, «не»

$\wedge$ - конъюнкция, «и»

$\vee$ - дизъюнкция, «или»

$\rightarrow$ - импликация, «влечет», «если…, то…»

$\equiv$ - эквивалентность, «равносильно»

Индуктивное построение формулы (исчисление):

Логические константы, логические имена – формулы.

- Если Φ, Ψ - формулы, $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$, то

  $(\neg\, \Phi)$, $(\Phi\ \tau\ \Psi)$ – формулы.

Теорема об однозначности анализа формул логики высказываний. Для любой формулы Θ логики высказываний выполнено ровно одно:

- Θ – логическая константа,
- Θ – логическое имя,
- Θ = $(\neg\, \Phi)$, где Φ однозначно определяется по формуле Θ,
- Θ = $(\Phi\ \tau\ \Psi)$, где τ, Φ, Ψ однозначно определяются по формуле Θ.

Д. Идея – анализ скобочной структуры, баланс скобок… Индукция

Логика высказываний

Семантика.

***B*^N -** множество бесконечных последовательностей из 0 и 1.

Фиксируем *интерпретацию* $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots \in \boldsymbol{B}^{\mathbf{N}}$.

Значение формулы при данной интерпретации α.

Индукция по построению:

1. Значением логической константы является она сама.
2. Значением имени высказывания A_i является α_i .
3. Значением формулы $(\neg\Phi)$ является отрицание значения формулы Φ,

   т. е. **Зн Φ = 1 - Зн Φ.**
4. Значением формулы **$(\Phi\ \tau\ \Psi)$, где $\tau \in \{\rightarrow, \wedge, \vee, \equiv\}$**

   является результат применения операции τ

   к значениям формул Φ, Ψ.

Однозначность значения получается из однозначности анализа формулы.

Значение формулы – функция $\boldsymbol{B}^{\mathbf{N}} \rightarrow \boldsymbol{B}$.

Пусть наибольший номер переменной в формуле равен n.

Тогда формула задает функцию $B^n \rightarrow B$.

Логика высказываний

Формула

- Общезначима (тавтология) – функция тождественно истинна (равна 1 на любом наборе аргументов)
- Выполнима – существует набор аргументов, на котором она истинна
- Противоречие – всюду ложна
- Эти свойства проверяются перебором

Подстановка

Пусть w, u – произвольные слова, x – буква. Подстановка u вместо x в w – это результат одновременной замены всех вхождений x в w на u. Обозначение: w[*u*/*x*] .

Свойство подстановки. Пусть А и Б – две формулы, x – имя и фиксирована некоторая интерпретация. Тогда, при этой интерпретации

- Зн А[*Б*/*x*] = Зн А[Зн*Б*/*x*]

Значения индуктивно строящихся выражений:

- Значение выражения определяется значением компонентов, из которых оно построено, а не их внутренней структурой.

Логика отношений

- Общезначимость и т. д.
- Прошлая лекция
- Процесс построения модели (то есть структуры, где формула истинна).
- Если он обрывается, то модели не существует.
- Как проверять общезначимость?
- Пытаться построить модель, где формула ложна (то есть ее отрицание истинно).
- Если формула общезначима, то мы это выясним.

Логика отношений

- Можно ли устанавливать общезначимость в привычном формате «рассуждений», «выводов», где понятен «ход мысли».
- Индуктивное определение выводимой формулы
- Может быть доказана теорема о полноте: «все истинное доказуемо»
- Рассмотрим более простой пример
- Он интересен сам по себе как расширение математически описываемых человеческих рассуждений.

Модальная логика

Синтаксис

Новая связка:

□ – необходимо.

В индуктивное построение формулы логики высказываний добавляется еще одна возможность:

• если Φ — формула, то $(\Box\, \Phi)$ — тоже формула (читается «необходимо Φ»).

Определение

• Имя (высказывания) – формула

• Если Φ, Ψ - формулы, $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$, то $(\neg\Phi)$, $(\Box\, \Phi)$, $(\Phi\tau\Psi)$ – формулы.

Здесь нет логических констант (для упрощения).

• Часто в формуле $(\Box\, \Phi)$ опускают внешние скобки.

Например, вместо

$$\big(\Box\,(A \rightarrow B)\big) \rightarrow \big((\Box\, A) \rightarrow (\Box\, B)\big).$$

пишут

$$\Box\,(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box\, A \rightarrow \Box\, B).$$

Модальная логика
Семантика

Содержательные интерпретации выражения $\Box A$:

- Необходимо *A*
- Всегда *A*
- Должно быть *A*
- Известно, что *A*
- Считается, что *A*
- Утверждение *A* доказуемо
- После завершения программы выполнено *A*

Другие *модальности* (не похожие на необходимость):

- Желательно, вероятно, запрещено, хорошо, удобно…

Вероятностные логики, нечеткие логики, квантовые логики… - неклассические

Модальная логика.
Семантика

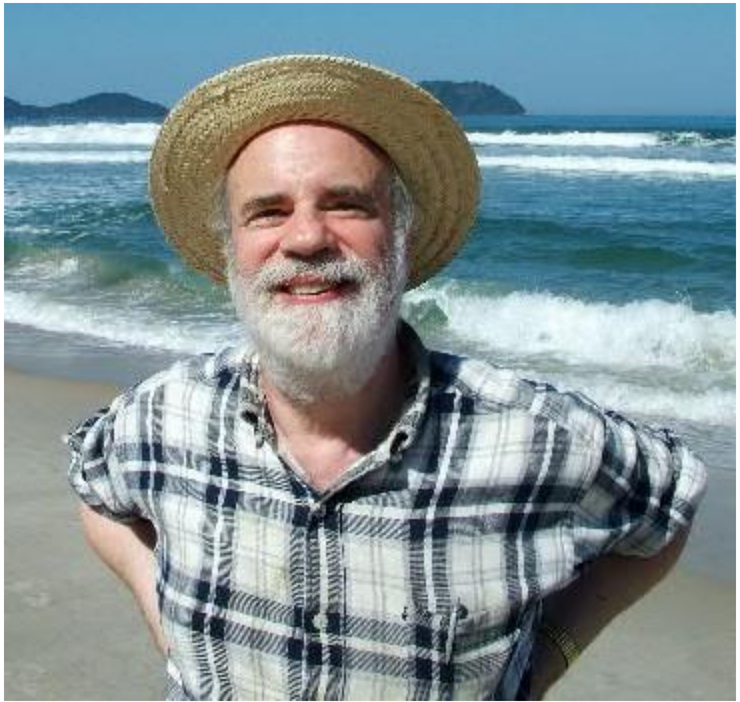
Шкалой Крипке называется пара $F = \langle S, R \rangle$, где

- S — произвольное непустое множество *миров*,
- $R \subseteq S \times S$ — произвольное отношение *достижимости* (одного мира из другого)

(ок. 1958, в возрасте 17 лет).

Шкалу можно представлять себе, как граф.

Сол Крипке (13.11. 1940 -)



Модальная логика

Семантика

Фиксируем шкалу *F*

- *Интерпретация V* :

каждое имя *p* отображает в множество миров $V(p) \subseteq S$.

- ***Значение формулы A в мире s шкалы F при интерпретации V* – это элемент из *B*, определяемый индуктивно.**

- Для имен **Зн (*p, s*) = 1** $\Leftrightarrow s \in V(p)$ (таким образом, $V(p)$ – это множество миров *s*, в которых *p* истинна).

- **Зн (□ *A, s*) =** $\wedge$ **Зн (*A, t*)** по всем *t*, достижимым из *s* (бесконечная конъюнкция аналогична конечной).

- Остальное – как в логике высказываний.

Задача. Какие операции на множествах миров (где высказывание истинно) соответствуют связкам логики высказываний.

Модальная логика

Истинность

Отношение $F,s,V \vDash A$. *Читается* «***формула А истинна в мире s шкалы F при интерпретации V***».

• Формула A ***истинна в шкале*** F, обозначение: $F \vDash A$, если она истинна в любом мире этой шкалы при любой интерпретации.

• Формула ***истинна (общезначима)***, если она истинна в любой шкале. Обозначение $\vDash A$

Модальная логика

Свойства истинности

для любых F, A, B.

1. Подстановка формул вместо имён высказываний в тавтологию логики высказываний дает истинную формулу модальной логики.

2. $\models \Box (A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.

3. Если $F \models A$, то $F \models \Box A$.

4. Если $F \models A$ *и* $F \models A \to B$, то $F \models B$.

Д. 1. – индукция по построению – определению значения. Значение формулы определяется значениями использованных подформул (как в Свойстве подстановки).

4. Рассуждаем в данном мире при данной интерпретации.

3. А – во всех мирах, значит, во всех мирах, достижимых из данного.

Задача. Доказать 2 (прежде чем смотреть следующий слайд).

Доказательство п. 2.

$F \models \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

- Возьмем интерпретацию и мир.

1. Пусть посылка $\Box (A \to B)$ – истинна.
2. $(A \to B)$ – истинна во всех достижимых
3. Пусть $\Box A$ – истинна.
4. A – истинна во всех достижимых
5. B – истинна во всех достижимых (по 2)
6. $\Box B$ – истинна

Исчисление K (Крипке)

Определение выводимой формулы
Бесконечное количество аксиом:

- Подстановки формул вместо имен в тавтологии логики высказываний – выводимы.
- Все формулы вида

  $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ – выводимы (аксиома нормальности).

Три правила вывода:

- Если A – выводима, то
  - $\Box A$ – выводима (**необходимость**),
  - подстановка в A формул вместо имен – выводима (**подстановка**).
- Если A, $A \to B$ – выводимы, то

  B – выводима (**modus ponens – MP**).

  Исчисление – индуктивное определение выводимости (обсуждение – будет)

Истинность формул, выводимых в К

Задача. Любая выводимая формула истинна в любой шкале.

- **Индукция по определению выводимости,** используя **Свойства истинности**

Модальная логика

Для любых F, A, B:

1. Подстановка формул вместо имен в тавтологии дает общезначимые формулы.

2. $F \vDash \Box (A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.

3. Если $F \vDash A$, то $F \vDash \Box A$.

4. Если $F \vDash A$ и $F \vDash A \to B$, то $F \vDash B$.

Было проверено в свойствах истинности.

Отсюда по индукции получается истинность выводимых формул.

Истинность выводимого (параллельно)
тавтологии - очевидно

Выводимость

$K \vdash \Box (A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

Если $K \vdash A$, то

$K \vdash \Box A$.

Подстановка в A формул вместо имен – выводима.

Если $K \vdash A$ и $K \vdash A \to B$, то $K \vdash B$.

Истинность

$F \vDash \Box (A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

Если $F \vDash A$, то

$F \vDash \Box A$.

Подстановка в A формул вместо имен – истинна.

Если $F \vDash A$ и $F \vDash A \to B$, то

$F \vDash B$.

Несколько общих определений и утверждений, полезных в контексте шире модальной логики

Противоречивые множества формул

- Формула называется синтаксическим противоречием, если выводимо ее отрицание.
- На этой лекции мы будем иногда опускать слово «синтаксическое». Раньше «противоречие» – не совместность, отсутствие модели
- Множество формул называется (*синтаксически*) *противоречивым*, если конъюнкция каких-то формул из нее – противоречие, (*синтаксически*) *непротиворечивым* – в противном случае.

Лемма о противоречивой конъюнкции

В исчислении **K** если A – противоречие, то $A \wedge B$ – противоречие.

Д. $\neg p \to \neg(p \wedge q)$ – тавтология. Значит, если в ***K*** выводима посылка, по MP в ***K*** выводимо заключение.

Задача. Если множество содержит противоречивое подмножество, то оно противоречиво.

Лемма о противоречии

Противоречивость $\{B_1, \ldots , B_n, \neg A\}$ эквивалентна
$K \vdash B_1 \to (\ldots(B_n \to A)\ldots)$ и эквивалентна

$K \vdash \wedge B_\mathrm{i} \to A$.

(то есть выводимость формулы эквивалентна (синтаксической) противоречивости ее отрицания)

Д. Противоречивость записывается как

$K \vdash \neg(B_0 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg A)$

Пусть формулы A, B_i – имена.

Каждая из трех формул ложна, только если все B_i истинны, а A – ложно.

- Запишем импликацию между любыми двумя формулами. Это – тавтология, следовательно – выводима. (Это – наша аксиома.)
- Для любых A, B_i из выводимости одной из формул по MP следует выводимость другой.

Выводимость из множества формул

Формула A *выводима* из множества D, если

$K \vdash \wedge B_i \to A$ для некоторого (конечного) множества формул B_i из D.

Множество *D замкнуто*, если оно содержит все выводимые из него формулы.

Полные множества формул

Непротиворечивое множество формул называется *полным*, если для каждой формулы оно содержит или эту формулу, или ее отрицание.

Лемма. Полное множество замкнуто.

Пусть D – полное, A – выводимо из D, т. е.

$K \vdash \wedge B_{\text{i}} \to A$

По Л. о противоречии

$\{ B_1, \ldots, B_n, \neg A\}$ – противоречиво.

Пусть D не содержит A, тогда D содержит $\neg A$ (полнота),

D содержит противоречивое множество.

Значит, D содержит А.

Лемма о полном расширении

Всякое непротиворечивое множество можно расширить до полного непротиворечивого.

Д. Перебираем все формулы, пытаясь добавить или формулу, или ее отрицание.

• Предположим, что ни то, ни другое невозможно:

B – конъюнкция всех формул, которые входят в противоречия для A и $\neg A$. Тогда по лемме о противоречивой конъюнкции

$K \vdash B \to A,\ B \to \neg A.$

Лемма о полном расширении

Подстановка в тавтологию

$K \vdash (B \to A) \to ((B \to \neg A) \to \neg B)$.

Значит по MP

- $K \vdash ((B \to \neg A) \to \neg B)$.
- $K \vdash \neg B$.
- Таким образом, уже B было противоречием.

Объединение всех полученных множеств является расширением, полно и непротиворечиво

– противоречие требует конечного числа элементов.

Общее замечание

Сформулированные последние определения и утверждения могут быть использованы в намного более широком классе случаев, чем модальная логика, и мы к ним будем прибегать и в дальнейшем.

Выводимость истинного

Мы будем интересоваться истинностью в специальной *канонической* шкале $M^K = (S^K;R^K)$.

• Элементы S^K – все полные (синтаксически) непротиворечивые множества формул. Отношение достижимости:

$R^K(s; t) \Leftrightarrow \{A \mid \Box A \in s\} \subseteq t$.

• Интерпретация $V^K(p) = \{s \mid p \in s\}$.

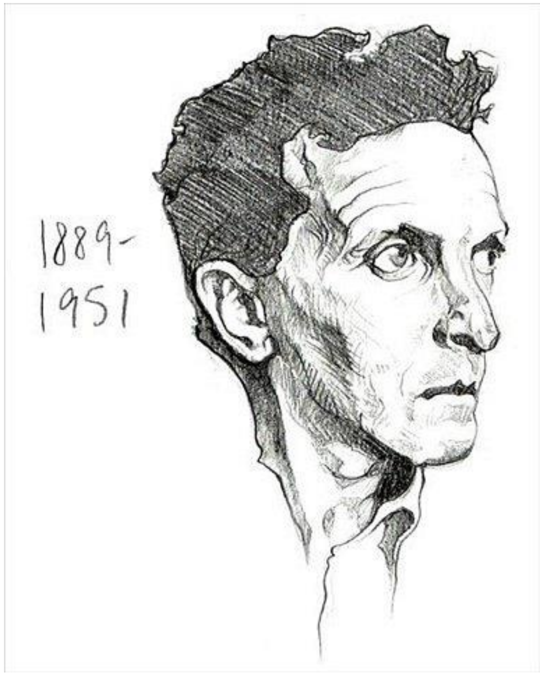
То есть, имя *p* считается истинным в тех мирах (множествах формул),
которым оно принадлежит.

Семантику мы определяем через отношение $\in$.

Выводимость у нас «запрятана» внутрь миров.

***Мир есть совокупность фактов**, а не вещей.*

Людвиг Витгенштейн (26.04.1889 — 29.04.1951)



Утверждение 1.

Для любого мира $s \in S^K$ и формулы A

$\Box A \in s \iff (A \in t$ для всех t, для которых $R^K(s; t))$.

То есть, действительно, принадлежность миру $\in$
продолжает играть роль истинности в мире;
в этом утверждении − для $\Box$.

Доказательство. ($\Rightarrow$)

Пусть $\Box A \in s$ и для t выполнено $R^K(s; t)$.

По определению

$R^K(s; t) \iff \{A \mid \Box A \in s\} \subseteq t$.

Значит, $A \in t$.

Утверждение 1.

Для любого мира $s \in S^K$ и формулы A

$\Box A \in s \Leftrightarrow (A \in t$ для всех t, для которых $R^K(s; t))$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$

Пусть $u = \{B \mid \Box B \in s\}$. Тогда $u \cup \{\neg A\}$ противоречиво.

- Иначе расширим $u \cup \{\neg A\}$ до t из S^K. $u \subseteq t$, t достижимо из s (опр. $R^K(s; t) \Leftrightarrow \{A \mid \Box A \in s\} \subseteq t$). Значит, $A \in t$.

Противоречие.

- По Л. о противоречии, в u есть $B_1, \dots, B_n$, для которых $K \vdash B_1 \to (\dots(B_n \to A)\dots)$.

  $K \vdash \Box(B_1 \to (B_2 \to (\dots(B_n \to A)\dots)))$ (необходимость).

Используя аксиому $\Box(B \to A) \to (\Box B \to \Box A)$ и (MP), получаем $K \vdash \Box B_1 \to \Box(B_2 \to (\dots(B_n \to A)\dots))$.

- Поскольку $\Box B_1 \in s$ и s замкнуто относительно MP, то

$\Box(B_2 \to (\dots(B_n \to A)\dots)) \in s$.

Продолжая так же, получаем $\Box A \in s$.

Утверждение 2.

Для любого мира $s \in S^K$ и формулы A

$$M^K, s, V^K \models A \quad \Leftrightarrow \quad A \in s.$$

Здесь мы получаем совпадение ⊨ и ∈ уже для всех формул.

Д. Индукция по построению формулы.

Для имен – определение V^K:

Истинность $p \;\Leftrightarrow\; s \in V^K(p) = \{s \mid p \in s\} \;\Leftrightarrow\; p \in s$.

Для связок логики высказываний получается с использованием полноты s и замкнутости s относительно МР:

• Истинность $\neg A$ эквивалентна не-истинности A (опр. 3н), эквивалентна не-принадлежности A к s (индукт. предп.), эквивалентна принадлежности $\neg A$ к s (полнота).

• Истинность импликации означает ложность посылки или истинность заключения…

Задача. Завершить доказательство.

Утверждение 3. $\boldsymbol{M^K \vDash A \iff K \vdash A}$.

Д. Пусть A – истинна.

Если A не выводима, то множество $\{\neg A\}$ – не противоречиво. В противном случае $K \vdash \neg\neg A$. Поскольку $K \vdash (\neg\neg A \to A)$, то $\{\neg A\}$ можно расширить до некоторого *s,* не содержащего A.

По Утверждению 2 A не истинно. Противоречие.

($\Leftarrow$) – это Истинность выводимого.

Теорема полноты для К. **Формула *А* выводима в Исчислении *К* тогда и только тогда, когда она истинна в любой шкале Крипке.**

Задача. Доказать Теорему (куда девается $\boldsymbol{M^K}$?)

Задача. Сформулировать Теорему Полноты для Логики отношений.

Роберт Шекли. «Обмен разумов»

- На Земле он или на ее дубле?
- Нет ли здесь приметной детали, не соответствующей той Земле, где он родился? А может быть, таких деталей несколько? Марвин искал их во имя своего душевного покоя. Он обошел Стэнхоуп и его окрестности, осмотрел, исследовал и проверил флору и фауну.

Все оказалось на своих местах. Жизнь шла заведенным чередом; отец пас крысиные стада, мать, как всегда, безмятежно несла яйца.

Он отправился на север, в Бостон и Нью-Йорк, потом на юг, в необозримый край Филадельфия - Лос-Анджелес. Казалось, все в порядке. Он подумывал о том, чтобы пересечь страну с запада на восток под парусами по великой

реке Делавэр и продолжить свои изыскания в больших городах Калифорнии - Скенектеди, Милуоки и Шанхае.

Однако передумал, сообразив, что бессмысленно провести жизнь в попытках выяснить, есть ли у него жизнь, которую можно как-то провести.

Кроме того, можно было предположить, что даже если Земля изменилась, то изменились также его органы чувств и память, так что все равно ничего не выяснишь.

И потому охотно и благосклонно Марвин

принял свой мир за чистую монету, женился на Марше Бэкер и жил с нею долго и счастливо.