Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 8
Логика отношений

Алексей Львович Семенов

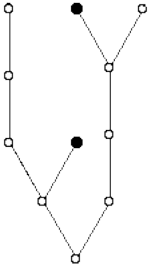
Построение дерева

У каких теорий имеется модель?

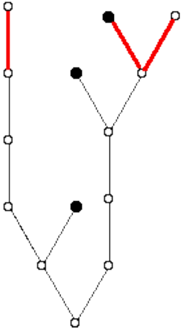
$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_n \subset \ldots .$

вершина, корень, лист, сын, потомок, ветвь.

T_i:



T_{i+1}:



Технические соглашения

Задача. Дайте формальное описание двоичного дерева.

Дерево – множество слов в {0,1}, содержащее начала слов.

Дерево как упорядоченное множество.

Используем только $\vee, \neg, \exists$.
$(\forall x \Phi(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists x \neg \Phi(x))$

$\Gamma = (\Gamma^+, \Gamma^-)$

M модель $\Gamma \Leftrightarrow$ в M истинны все формулы из Γ^+ и ложны все формулы из Γ^-

каждой вершине $v \in T_i$ соответствует теория Γ_v

Построение дерева

мертвый лист – $\Gamma_v^+ \cap \Gamma_v^- \neq \varnothing$

$v \in T_i, \Psi \in \Gamma_v^+ \cup \Gamma_v^-$

(i) $\Psi \in \Gamma_v^+$, $\Psi = \neg\Phi$.
$\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^- \cup \{\Phi\}$.

(ii) $\Psi \in \Gamma_v^-$, $\Psi = \neg\Phi$.
(i) с заменой + на -.

(iii) $\Psi \in \Gamma_v^+$, $\Psi = (\exists x \Phi(x))$.
$c \notin \Gamma_v^+ \cup \Gamma_v^-$
$\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+ \cup \{\Phi(c)\}, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^-$.

Построение дерева

(iv) $\Psi \in \Gamma_v^-$, $\Psi = (\exists x \Phi(x))$.
C – список констант из $\Gamma_v^+ \cup \Gamma_v^-$.
$\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^- \cup \{\Phi(c) | c \in C\}$.

(v) $\Psi \in \Gamma_v^+$, $\Psi = \Phi_0 \vee \Phi_1$.
$\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+ \cup \{\Phi_0\}, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^-$.
$\Gamma_{v1}^+ = \Gamma_v^+ \cup \{\Phi_1\}, \Gamma_{v1}^- = \Gamma_v^-$.

(vi) $\Psi \in \Gamma_v^-$, $\Psi = \Phi_0 \vee \Phi_1$.
$\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^- \cup \{\Phi_0, \Phi_1\}$.

$\Gamma_v^+ \subset \Gamma_{vi}^+, \Gamma_v^- \subset \Gamma_{vi}^-$

$T^* = \bigcup T_i$

Конечная совместность

(A^+, A^-) *конечно совместна* $\Leftrightarrow$
$B^+ \subset A^+, B^- \subset A^-, B^+, B^-$ – конечны $\Rightarrow (B^+, B^-)$
совместна.

Лемма 1. *Если вершине v в дереве T^* соответствует конечно совместная теория, то и одному из детей вершины v соответствует конечно совместная теория.*

(iii) $\Gamma_{v0} = (\Gamma_v^+ \cup \{\Phi(c)\}, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^-)$.
$(A^+ \cup \{\Phi(c)\}, A^-)$ – конечно.
$(A^+ \cup \{(\exists x \Phi(x))\}, A^-) \subset \Gamma_v$.

(v) $\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+ \cup \{\Phi_0\}, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^-$ и
$\Gamma_{v1}^+ = \Gamma_v^+ \cup \{\Phi_1\}, \Gamma_{v1}^- = \Gamma_v^-$.
$(A^+ \cup \{\Phi_0\}, A^-) \subset \Gamma_{v0}^+, (B^+ \cup \{\Phi_1\}, B^-) \subset \Gamma_{v1}^+$.
$(A^+ \cup B^+ \cup \{\Phi_0 \vee \Phi_1\}, A^- \cup B^-) \subset \Gamma_v$.

Задача. Рассмотрите все случаи.

Конечная совместность

$v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots$ – *ветвь* $\Leftrightarrow$ v_{i+1} сын v_i.

Лемма 2. *Если вершине v в дереве T^* соответствует конечно совместная теория, то в дереве T^* существует бесконечная ветвь, проходящая через вершину v.*

Выбор формулы

Процедура выбора формулы $F\colon v \to \Phi \in \Gamma_v$

Процедура *корректна* $\Leftrightarrow v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots; \Phi \in \Gamma^+_{v_0} \cup \Gamma^-_{v_0}$ найдется $v_i, F(v_i) = \Phi$

Задача. Постройте корректную процедуру выбора формул.

Лемма 3. *Если дерево T^* построено с использованием корректной процедуры выбора и через вершину v проходит бесконечная ветвь, то теория, соответствующая вершине v, совместна.*

Построение модели

Бесконечная ветвь $v, v_1, \ldots$.

$A^+ = \bigcup \Gamma^+_{v_i}, \qquad A^- = \bigcup \Gamma^-_{v_i}, \qquad \Gamma^* = (A^+, A^-)$.

Γ^* совместна.

Носитель M – множество символов констант, входящих в $A^+ \cup A^-$.

$M \models R(a_0, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R(a_0, \ldots, a_n) \in A^+$.

$\Phi \in A^+ \Rightarrow M \models \Phi; \qquad \Phi \in A^- \Rightarrow M \models \neg\Phi$.

(0) Φ – атомная формула.

(1) $\Phi = (\exists x \Psi(x)), \quad \Phi \in A^-$.

Для любого $c \in M, \quad \Psi(c) \in A^-$.

Найдется $v_i, \quad \Phi \in \Gamma^-_{v_i}, \quad c \in \Gamma^+_{v_i} \cup \Gamma^-_{v_i}$.

Корректность $\Rightarrow j > i$, в вершине v_j была выбрана Φ.

Из (iv), $\Psi(c) \in \Gamma^-_{v_{j+1}}$.

Задача. Рассмотрите все случаи.

Следствия

Теорема компактности. *Если теория конечно совместна, то у нее есть модель.*
Γ – конечно совместная теория, T_0 – корень с теорией Γ.
Лемма 2: в T^* есть бесконечная ветвь.
Лемма 3: у теории Γ есть модель.

(0) $T_i = T_{i+1}$, теория несовместна;
(1) в T^* есть бесконечна ветвь, теория совместна;
(2) T^* бесконечно и не содержит бесконечных ветвей.

Конечное ветвление $\Leftrightarrow$ у каждой вершины конечное число сыновей.
Лемма Кёнига. *В бесконечном дереве с конечным ветвлением есть бесконечный путь.*
Задача. Докажите лемму Кёнига.

Перечислимость

$\Gamma \models \Phi \Leftrightarrow (\Gamma, \{\Phi\})$ – несовместна.

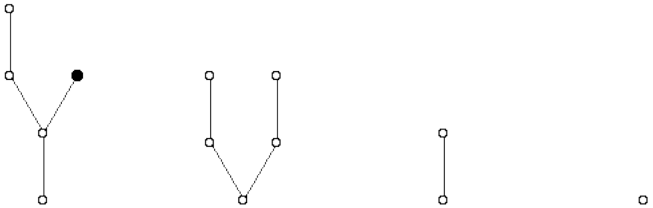
Утверждение 1. *Если конечная теория Γ совместна и полна, то существует алгоритм, который по утверждению Φ определяет, следует ли утверждение из теории (отношение следования из Γ разрешимо).*

Два дерева: $(\Gamma, \{\Phi\}), (\Gamma, \{\neg\Phi\})$.

Задача. Разрешимо ли следование для любой конечной теории.

Перечислимость

Утверждение 2. *Существует алгоритм, который по конечной теории* Γ *перечисляет все утверждения, следующие из теории и только их (отношение следования перечислимо).*
Список утверждений $\Phi_0, \ldots, \Phi_i, \ldots$.
Шаг работы алгоритма:



$(\Gamma, \{\Phi_0\})$ $(\Gamma, \{\Phi_1\})$ $(\Gamma, \{\Phi_2\})$ $(\Gamma, \{\Phi_3\})$

Нормальные теории

Γ_Q :

$(\forall u(\neg(u < u)))$

$(\forall u, v(u < v \vee v < u \vee u = v))$

$(\forall u, v, w((u < v \wedge v < w) \rightarrow u < w))$

$(\forall u(\exists v(u < v)))$

$(\forall u, v(u < v \rightarrow (\exists w(u < w < v))))$

$(\forall u(\exists v(v < u)))$

Нормальные теории

$\Gamma \to \Gamma^{\approx}$:

(1.1) $(\forall x(x \approx x))$

(1.2) $(\forall x, y(x \approx y \equiv y \approx x))$

(1.3) $(\forall x, y, z((x \approx y \wedge y \approx x) \to x \approx z))$

(2) $(\forall \bar{x}, \bar{y}((x_0 \approx y_0 \wedge \cdots \wedge x_n \approx y_n) \to R(\bar{x}) \equiv R(\bar{y})))$

(3) заменим "=" на "$\approx$".

Модель $\Gamma^{\approx}$ *нормальна*, если "$\approx$" – совпадение.

M – модель $\Gamma^{\approx}$ можно нормализовать $\to$ носитель $M/\approx$, отношения заданы естественным образом.

Задача. Убедитесь, что нормализованная структура является моделью Γ.

Историческая справка

Историческая справка в конце данной лекции подробно обсуждается в лекции 9.