Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 6
Логика отношений

Алексей Львович Семенов

Основные определения

$M = \langle D, \Sigma, \textbf{Зн} \rangle$ — структура, Φ — формула.

$M \models \Phi$ – формула Φ *истинна* в M.

Формула $\Phi(\bar{x})$ содержит свободные переменные, $\bar{a} \in D$.
$M \models \Phi(\bar{a})$ – Φ истинна в M, если вместо переменных x_i подставлены элементы a_i.

Замкнутая формула или *утверждение* – формула без свободных переменных.

Теория – множество утверждений.

Модель теории – структура, в которой истинны все утверждения теории.

Основные определения

Совместная теория –
теория, у которой есть модель.

Утверждение Φ *следует* из теории Γ ($\Gamma \models \Phi$) –
формула Φ истинна в любой модели теории Γ.

Является ли отношение следования разрешимым?

Является ли отношение следования перечислимым?

Теория Γ *полна*, если для любой замкнутой формулы
Φ выполнено $\Gamma \models \Phi$ или $\Gamma \models \neg\Phi$.

Плотный порядок без первого и последнего

$$(\forall u(\neg(u < u)))$$
$$(\forall u, v(u < v \vee v < u \vee u = v))$$
$$(\forall u, v, w((u < v \wedge v < w) \to u < w))$$
$$(\forall u, v(u < v \to (\exists w(u < w < v))))$$
$$(\forall u(\exists v(v < u)))$$
$$(\forall u(\exists v(u < v)))$$

Теория Γ_Q. Плотный линейный порядок без первого и последнего элемента.

$a_0 < a_1 < \cdots < a_n \in A; b_0 < b_1 < \cdots < b_n \in B$.
$\varphi\colon A \to B; \varphi(a_i) = b_i$.

Можно ли что-то добавить к Γ_Q, чтобы отделить $\mathbb{Q}_<, \mathbb{R}_<$?

Плотный порядок без первого и последнего

Утверждение. *Теория* Γ_Q *полна.*

M_1 и M_2 – две не эквивалентные модели теории Γ_Q.
$M_1 \models \phi, M_2 \models \neg\phi$.

Они бесконечны.
Если они обе счетны, то они изоморфны, то есть эквивалентны.
По тереме Лёвенгейма – Сколема, можно считать, что M_1 и M_2 счетны.
Противоречие.

Плотный порядок без первого и последнего

Теория ω-*категорична* — все счётные модели изоморфны.

Признак Лося – Воота. *Совместная ω-категоричная теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей, полна.*

Общее понятие категоричности.

Совместная теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей и категоричная в некоторой бесконечной мощности, полна.

Дискретный порядок с наименьшим

$$(\forall u(\neg(u < u)))$$
$$(\forall u, v(u < v \vee v < u \vee u = v))$$
$$(\forall u, v, w((u < v \wedge v < w) \to u < w))$$
$$(\forall u(\exists v(u < v)))$$
$$(\forall u(0 < u \vee u = 0))$$
$$(\forall u(\exists v(u < v \wedge (\forall w(u < w \to (v = w \vee v < w))))))$$
$$(\forall u(u \neq 0 \to (\exists v(v < u \wedge (\forall w(w < u \to w = v \vee w < v))))))$$

Теория Γ_N: Дискретный линейный порядок с наименьшим элементом.

Примеры моделей: $\mathbb{N}_<$, чётные числа.

Является ли теория Γ_N ω-категоричной?

$$s(x, y) \Leftrightarrow x < y \wedge (\forall w(x < w \to (y = w \vee y < w)))$$

Дискретный порядок с наименьшим

Можно ли отделить $\mathbb{N}_<, \mathbb{N}_< + \mathbb{Z}_<$?

Есть ли у Γ_N счетные модели кроме $\mathbb{N}_<, \mathbb{N}_< + \mathbb{Z}_<$?

M – произвольная модель теории Γ_N, $a, b \in M$.
a, b *близки* – $\{c \in M | a \leqslant c \leqslant b (b \leqslant c \leqslant a)\}$ конечно.

Классы эквивалентности – *галактики*, галактика $\tilde{a}$.

Как устроена галактика $\tilde{0}$? Как устроены все прочие галактики?

Порядок на галактиках: $\tilde{a} < \tilde{b}$ – $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ и $a < b$.

Корректно ли определен порядок? Будет ли порядок на галактиках линейным? Есть ли среди галактик наименьшая?

Дискретный порядок с наименьшим

$\mathbb{N} = \langle N, \{0, 1, 2, \ldots, <, +, \times\}, \textbf{Зн}_0\rangle$.
$R_+(n_1, n_2, n_3) \Leftrightarrow n_1 + n_2 = n_3$
$R_\times(n_1, n_2, n_3) \Leftrightarrow n_1 \cdot n_2 = n_3$
$a + b + c = d \Rightarrow (\exists u(R_+(a, b, u) \wedge R_+(u, c, d)))$

Теория $\mathrm{Th}_\mathbb{N} \cup \{c \neq i \mid i \in N\}$ совместна.
$\mathbb{N}^*$ – счетная модель данной теории.
$\mathbb{N}^*_<$ получена из $\mathbb{N}^*$ удалением всех отношений, кроме $<$ и константы 0.

$\mathbb{N}^*_<$ – модель теории Γ_N.

Дискретный порядок с наименьшим

Может ли структура $\mathbb{N}^*_<$ оказаться изоморфной $\mathbb{N}_<$?

$(\forall x(\exists y(y = x \pm i))) \Rightarrow c \pm i$

$(\forall x(\exists y(y = x + x))) \Rightarrow c + c$

$(\forall a, b(\exists u(u + u = a + b \vee u + u = a + b + 1)))$

Порядок на галактиках $\mathbb{N}^*_<$ совпадает с $\mathbb{Q}^+_<$, причем $\tilde{0}$ соответствует 0 в $\mathbb{Q}^+$

Порядок на $\mathbb{N}^*_<$ совпадает с $N + Z \times Q$
$A \times B; (a_0, b_0) < (a_1, b_1) \Leftrightarrow b_0 < b_1 \vee (b_0 = b_1 \wedge a_0 < a_1)$

Дискретный порядок с наименьшим

M – *правильная* подструктура: $\tilde{a} \subset M$ при $a \in M$.

Утверждение. *Любая счетная модель теории* Γ_N *изоморфна правильной подструктуре структуры* $\mathbb{N}^*_<$.

Эскиз доказательства. Множество галактик любой счетной модели теории Γ_N – не более чем счетное линейно упорядоченное множеством с наименьшем элементом.
Такое множество изморфно подструктуре структуры $\mathbb{Q}^+_<$.

Дискретный порядок с наименьшим

Утверждение. *Любая правильная подструктура M структуры* $\mathbb{N}^*_<$ *является элементарной подструктурой.*

Если $\bar{a} \in M, \mathbb{N}^*_< \vDash \Phi(\bar{a}, b)$ для некоторого $b \in \mathbb{N}^*_<$, то $\mathbb{N}^*_< \vDash \Phi(\bar{a}, b')$ для некоторого $b' \in M$ *(Тарский – Воот)*.

$$\mathbb{N}_< \vDash \forall \bar{u}(\exists v \Phi(\bar{u}, v) \to \exists v'(\Phi(\bar{u}, v') \wedge \forall w(w < v' \to \neg\Phi(\bar{u}, w))))$$

$\mathbb{N}^*_< \vDash \Phi(\bar{a}, b') \wedge \forall w(w < b' \to \neg\Phi(\bar{a}, w)), b' \in \mathbb{N}^*_<$
Пусть $b' \notin M$. $\psi\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$.
$\psi(a) = a, a \in M; \psi(a)$ – предыдущий $a, a \notin M$.
ψ – автоморфизм $\mathbb{N}^*_<$
$\mathbb{N}^*_< \vDash \Phi(\bar{\psi}(\bar{a}), \psi(b'))$
$\mathbb{N}^*_< \vDash \Phi(\bar{a}, \psi(b')), \psi(b') < b'$.

Дискретный порядок с наименьшим

Утверждение. *Теория Γ_N полна.*

M_1 и M_2 – две не эквивалентные модели теории Γ_N.
Они бесконечны, по теореме Лёвенгейма – Сколема – счетны.
Каждая из них изоморфна правильной подструктуре структуры $\mathbb{N}^*_<$.
Все правильные подструктуры эквивалентны.
Противоречие.

Счетная модель $N + Z \times A$; A — счетное линейно упорядоченное множество.

Определимость

$M = \langle D, \Sigma, \textbf{Зн} \rangle$ — структура, R — n-местное отношение на D.
R *определимо* — $\overline{a} \in R \Leftrightarrow M \vDash \Phi(\overline{a})$.

Докажите, что объединение, пересечение и разность двух определимых отношений являются определимыми отношениями. Докажите, что проекция k-местного определимого отношения вдоль одной из "осей координат" является $k-1$-местным определимым отношением.

Теорема Тарского – Зайденберга.
Определимость всех разрешимых отношений в $\langle N, \{+, \times\} \rangle$.

Определимость

Определимо ли $z = xy$ в $\langle R, \{+, Sq\}\rangle$, $Sq(x, y) \Leftrightarrow y = x^2$?

Определимо ли "расстояние между точками x и y равно 2" в $\langle R^2, \{D\}\rangle$, $D(x, y) \Leftrightarrow$ "расстояние между точками x и y равно 1"?

Определимо ли $x < y$ в $\langle Q, \{+\}\rangle$?

метод автоморфизмов.

Определимость

метод автоморфизмов.
$M = \langle D, \Sigma, \mathbf{Зн} \rangle$;
$\varphi : D \to D$ – взаимнооднозначное отображение (перестановка).
$R(x_0, \ldots, x_n)$ – отношение на D. φ *сохраняет* R:
$R(\bar{a}) \equiv R(\bar{\varphi}(\bar{a}))$, $\bar{a} \in D$.

φ сохраняет все отношения из Σ и не сохраняет $R \Rightarrow R$ не определимо в Σ.

А как обстоит дело с $\Leftarrow$?

Определимость

$\mathbb{Q}_<$

$\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Q}; a_i < a_j \Leftrightarrow b_i < b_j$
$\varphi \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}; \varphi(a_i) = b_i.$

одноместные — тривиальны.
двухместные — тривиальные и порядок.
трехместные.
”между” — $x < y < z \vee z < y < x$.
”цикл” — $x < y < z \vee y < z < x \vee z < x < y$.

Определим ли порядок через цикл?
Определим ли порядок через между?
Определимы ли между и цикл друг через друга?
Как устроена структура пространств определимости $\mathbb{Q}_<$?