Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 15

Алексей Львович Семенов

План

- Сложность. Подход теории алгоритмов
- Сложность объекта
- Теорема Колмогорова
- Что такое случайность?
- Теория алгоритмов (напоминание)
- Время вычисления
- Реально решаемые задачи
- Задачи, решаемые перебором
- Универсальная переборная задача
- Естественные переборные задачи, их универсальность
- Проблема перебора

Сложность. Подход теории алгоритмов

Сложность объекта

- да, да, да,… да (1 млн. раз)
- На экране нет миллиона «да».
- Есть описание объекта.
- Сложность объекта – минимальная длина его описания.

Сложность объекта

- Что такое описание?
- Аргумент для
  - машины,
  - алгоритма,
  - вычислимой функции,

  дающей объект.
- Вычислимая функция (дающая объект по его описанию) – способ описания.
- Ее значения – это объекты, имеющие описание.
- Один объект может иметь много описаний, могут быть объекты без описаний.

Будем считать, что объекты и описания – двоичные слова. $|y|$ – длина слова y;

- *Сложность при данном способе описания f*

$$K_f(x) = \min \{|y| \mid f(y) = x\},$$

если у нет, то min = ∞.

Сложность объекта

- Способы описания бывают разные.
- Есть ли способ описания, дающий самые короткие описания?
- Нет (почти очевидно): возьмем любой способ, *x* - «сложный» при выбранном способе описании объект.

Задача. Существует f для которого $f(0) = x$ и $K_f(x) \le 1$.

- Можно ли получать описания, самые короткие «с точностью до» дополнительного слагаемого?
- Да. Точная формулировка:
- **Теорема Колмогорова**. Существует способ описания *u*, такой, что для любого способа описания *f* найдется такое число C, что для всякого объекта x выполнено:

$$K_u(x) \le K_f(x) + C .$$

Теорема Колмогорова

$$K_u(x) \le K_f(x) + C$$

Д. Фиксируем некоторый вариант задания вычислимых функций алгоритмами, например, алгоритмами Маркова.

• Как мы видели, существует универсальная функция u: для всякой вычислимой функции f, если p – задание (алгоритм для) f, в алфавите **B**, то для всех y:

$$f(y) = u(\langle p,y\rangle).$$

• Возьмем произвольное x и такое y, что $f(y) = x$. Тогда:

$u(\langle p,y\rangle) = x$

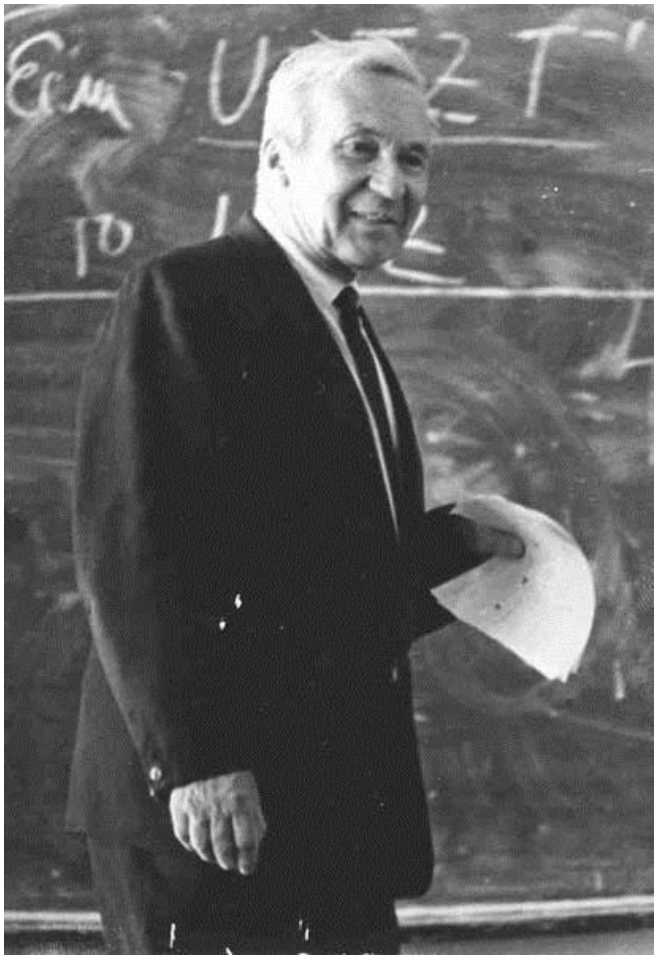
$K_u(x) \le |\langle p,y\rangle|$, y можно взять самым коротким.

• Осталось доказать, что $|\langle p,y\rangle| \le |y| + C$,
где C может зависеть от p, но не от y.

Задача. Каким нужно взять кодирование пар?

Задача. Может ли код быть короче, чем $|p|+|y|$?

Андрей Николаевич Колмогоров
25.04.1903 – 20.10.1987



Применение сложности объектов (колмогоровской сложности)

- Случайность
- Бросание монеты
- 011010010101111001001010…
- 010101010101010101010101…
- Вторая последовательность неслучайна?
- Вероятность

одинакова.

- Сложность

разная.

- Последовательность случайна, если ее (колмогоровская) сложность – максимальна.
- Информация в одном объекте о другом…

Теория алгоритмов (напоминание)

Переход к следующему в ансамбле

Свойство всякого ансамбля:

- Существует объект I (начальный, например – пустое слово) и
- действие S (следование), для которых {I, S(I), SS(I)…} – это весь ансамбль

- **Задачи** построения функции следования.
  - Слова в унарном алфавите
  - Двоичный алфавит
  - Произвольный алфавит
  - Цепочки слов
  - Списки

Кодирование

- Кодирование элементов ансамбля словами в двоичном алфавите.
- **Задача**. Действие, задающее взаимно-однозначное соответствие (обратное – тоже действие) для ансамблей:
  - Слов в любом алфавите
  - Цепочек слов
  - Списков.
- **Тезис Поста**. Тезис Черча – для кодов множеств в произвольных ансамблях

Перечислимость. Эквивалентные определения

- Перечислимые множества
  – множества значений вычислимых функций
- **Задача**. = множества значений всюду определенных вычислимых функций
- **Задача**. = области определения вычислимых функций
- Идеи:
  – Множество значений => область определения

  Для всякого исходного данного ждем, пока оно появится как значение, последовательно перебирая все аргументы для перечисления (действие следования). Если дождемся…
  – Область определения => множество значений всюду определенной функции

  Исходное данное рассматривать как пару: <Исходное данное, Число шагов> (если не пара – …). Если работа завершилась за это число шагов…

Перечислимость и разрешимость

Теорема. Множество разрешимо тогда и тогда, когда оно и его дополнение перечислимы.

Д. Дано разрешимое множество

Перечислимость – множество значений

•Начинаем работу с проверки, лежит ли элемент в множестве. Если лежит, то выдаем его в качестве результата, если нет…

Пусть множество и его дополнение перечислимы

•Идея: запустить *параллельно* функции перечисляющие множества и его дополнение.

•Уточнение. Делать в цикле *последовательно* по одному шагу одного и другого алгоритма. Когда один из них закончит работу, ответ есть.

Задача. Довершить рассуждения. В каком ансамбле?

Задача. Привести пример перечислимого неразрешимого множества (была функция, которую нельзя доопределить до всюду определенной вычислимой).

Сведение вычислимости к перечислимости

Задача. Функция вычислима <=> ее график перечислим

Перечислимость ⇔ породимость

Перечислимость => породимость

- Проверка создания получается из действия преобразования

Породимость => перечислимость

- Всякое исходное данное рассматривается как вывод.
- Результат

Функция вычислима <=> ее график породим

Перечислимость и логика отношений

- Множество общезначимых формул – область определения вычислимой функции
- Породимость – исчисление логики отношений

Сложность. Подход теории алгоритмов

Сложность вычислений

- О. *Сложность (временнАя) вычисления* – это число шагов вычисляющего алгоритма.
- Какими могут быть отдельные шаги? Какова «модель вычислений»?
- Например, алгоритмы Маркова или интуитивно представляемый компьютер.
- **Задача**. Есть ли алгоритм, быстро решающий данную задачу для заданного конечного множества исходных данных?
- Обычно говорят об асимптотическом поведении сложности вычисления, и это почти всегда оказывается осмысленным.
- Бывает, что алгоритм очень просто описывается, но требует для своего выполнения много времени. «Много» может означать экспоненту от размера исходного данного или еще больше.

Реально решаемая задача

– Сложность вычисления ограничена полиномом от размера исходного данного (длины двоичного слова). Класс **P**.

• Обычно, если задача реально решаема, то коэффициенты и степени полиномов оказываются «небольшими».

Задачи, решаемые перебором

- Типичная ситуация (считаем, что объекты – двоичные слова и их размер – это длина):

Задача о рюкзаке. Дано n+1 натуральное число: $a_1,\ldots, a_n, b$, можно ли составить из a_i сумму, равную b? (Каждое a_i разрешается брать не более одного раза.)

только пары a_i => полиномиальное время – количество пар квадратичное, умножить на время проверки, и т.д.

- Берутся не пары, а подмножества – время перебора экспоненциально.
- **23, 11, 44, 29, 18, 32, 19, 35, 67** – из этих чисел требуется составить сумму, равную **100**.
- **?**
- **Давайте попробуем**

11, 18, 19, 23, 29

Алгоритмы для функций и отношений

- Задача здесь состояла в построении быстрого алгоритма для поиска подмножества индексов.
- Можно, однако, спрашивать о быстром алгоритме выяснения, есть ли такое подмножество.
- **Задача**. Имея быстрый (полиномиальный) алгоритм выяснения, есть ли такое подмножество, построить быстрый алгоритм который будет выдавать множество индексов.
- Мы будем рассматривать алгоритмы для отношений (алгоритмы распознавания).

Задачи, решаемые перебором

Выполнимость. Дана формула логики высказываний. Выполнима ли она?

- Можно выяснить, перебирая все возможные наборы значений логических имен.
- Разных имен в формуле может быть, по порядку, например, корень квадратный от размера формулы.
- Экспонента может быть не от размера, а от корня квадратного от размера, но это не очень помогает.

Задача (аналогичная предыдущей). Умея проверять существование, строить объект.

Задачи, решаемые перебором

Общая формулировка

• Дано двуместное отношение R(x,y), где x – исходное данное, y – перебираемое (подсказка, подтверждение).

- ***Задача***: выяснить по данному x, существует ли y, для которого R(x,y):

$$\exists y\ R\ (x,y),$$

причем:

– размер y ограничен заданным полиномом от размера x,

– сложность вычисления R(x,y) ограничена полиномом от размера аргументов.

Отношение R и ограничивающие полиномы фиксированы для данной задачи.

• Задача о рюкзаке (y – цепочка номеров) и Выполнимость (y – цепочка значений) – таковы.

- **NP –** Класс всех задач, решаемых перебором.
- **N** Недетерминированность

Универсальная переборная задача

- **Универсальный алгоритм**
- получает на вход x и y, понимает x, как описание конкретного алгоритма и применяет его к y.
- Время работы P_0 не сильно отличается от времени работы x.
- Модифицированный универсальный алгоритм P_0 задает вычислимую функцию (отношение) U_0 :
- Если p – алгоритм, то $U_0(<x,p>,y)$ есть результат применения p к <x, y>.
- Если первый аргумент не оказывается парой такого вида, то отношение U_0 ложно.
- Отношение U_0 может и не вычисляться за полиномиальное время: для разных p полиномы, ограничивающие время работы и длину y, могут иметь разную степень, как функции длины x.

Универсальная переборная задача

- Еще модификация: отношение U, задаваемое, как

  U(<x, p,ℓ>, y), где алгоритм, вычисляющий U, работает так же, как алгоритм p, при этом ограничивает время работы этого алгоритма p длиной слова – третьего элемента тройки.
  (Если первый аргумент U – не такая тройка, то U – Л, если p не завершает работу за данное время, тоже Л.)
- U имеет полиномиальную сложность.
- ∃yU(z,y) – *универсальная переборная задача.*

Универсальность

- Предположим, что мы нашли алгоритм, позволяющий вычислять отношение $\exists y U(z,y)$ за **полиномиальное** время.
- Этот алгоритм:
- НЕ перебирает y и
- НЕ применяет p_0,
- а делает что-то совсем другое.

- Тогда мы сможем и любую переборную задачу, заданную алгоритмом p и соответствующими полиномиальными ограничениями, решать за полиномиальное время, сооружая каждый раз тройку $< x, p, \ell >$, (и при этом не имитируя работу алгоритма с описанием p и не перебирая y).

Естественные переборные задачи

- Предположим, что мы можем решать задачу о рюкзаке (в формулировке «найдется ли…») или “Выполнимость” за полиномиальное время.
- Поможет ли это в решении других переборных задач?
- Да.

Сведение к выполнимости

- Пусть имеется **Задача**: $\exists y\ R(x,y)$, решаемая перебором, и отношение R задается алгоритмом p.
- Будем считать, что наш алгоритм p – это алгоритм Маркова.
- Построим исходное данное для задачи выполнимости, то есть формулу логики высказываний Ф.

Моделирование работы алгоритма

с помощью выполнимости формул логики высказываний.

$\exists y\, R(x,y)$, отношение R задается (полиномиальным) алгоритмом p

Мы уже знаем алгоритм p и x, но, конечно, не знаем y

Общая схема:

- По p и x строим формулу логики высказываний
  существование y и допускающего (проверяющего)вычисления p ⇔ существование выполняющего формулу набора значений логических имен

Вычисление

- Граница для числа шагов – полином от длины x
- Максимальная длина промежуточного результата ограничена полиномом от длины x. Дополним промежуточный результат «пробелами» до максимальной длины.
- Будем кодировать результаты двоичными словами, все символы будут занимать отрезки равной длины.

Вычисление представлено матрицей, будем считать – квадратной.

При необходимости дополним строки и столбцы кодами пробелов. Размер матрицы m на m.

Моделирование работы алгоритма

Каждому элементу таблицы дадим имя (высказывания, состоящего в том, что этот элемент = 1)

В самой первой строке (соответствующей началу вычисления) соответствует паре <*x,y*>, сначала код *x* потом код *y*, потом пробелы.

Как написать: «существует *x,y* и вычисление»?

- Существование *y* – выполнимость формулы
- Вычисление однозначно определяется *x,y*

Как записать, что матрица представляет допускающее вычисление? Конъюнкция:

- Элементы первой строки, соответствующие символам *x,* равны кодам этих символов.
- Последняя непустая строка начинается с кода символа 1.
- Переход от каждой строки к следующей соответствует шагу работы алгоритма

Моделирование работы алгоритма

Как записать, что две последовательных строки матрицы (назовем их верхняя и нижняя) соответствуют шагу работы алгоритма?

- Применилась данная замена в данном месте
- Левых частей предыдущих замен в верхней строке нет
- Левая часть данной подстановки не встречается левее данного места в первой строке.
- Вторая строка – результат применения замены.

Записываем

- Дизъюнкция по выбору замены и места.
- Число членов дизъюнкции – количество замен в алгоритме на m
- Один член дизъюнкции:
  - Конъюнкция утверждений, относящихся к значению символов:
  - Идущих до выбранного места
  - Начинающихся с выбранного места и относящихся к выбранной замене
  - Идущих после

Моделирование работы алгоритма

Задача. Ввести логические имена и записать формулы подробнее

Задача. Оценить размер формулы в зависимости от размера *y*. (Моделируемый алгоритм уже фиксирован.)

Задача. Как использовать Выполнимость для решения Задачи о рюкзаке или иной переборной задачи?

Моделирование работы алгоритма

с помощью выполнимости формул логики высказываний.

Пример построения и оценки

•Фиксируем натуральное число *n* и слово

$\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ в алфавите **B**;

Строим формулу Ф, куда входят имена $A = A_1, \ldots, A_n$,

• $(0, A_i) = \neg A_i$

• $(1, A_i) = A_i$

$\Phi = (\alpha, A) = ((\alpha_1, A_1) \wedge \ldots \wedge (\alpha_n, A_n)) \leftrightarrow$

«цепочка А значений имен есть слово α»

Длина Ф меньше, чем $(10\ |\alpha|) \cdot \log (|\alpha|)$ (индексы A_i)

Проблема перебора

Доказать, что P≠NP

Проблема равенства классов *P* и *NP* входит [первой] в семь задач тысячелетия, за решение которой Математический институт Клэя назначил премию в миллион долларов США.

– Википедия

А. Н. Колмогоров, Л. Левин,

Л. Хачиян,

А. Разборов