Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 12

Алексей Львович Семенов

План

- Парадоксы самоприменимости
- Теорема Тарского о невыразимости истины
- Теорема Геделя о неполноте
- Теорема Геделя о недоказуемости непротиворечивости
- Недоказуемость «естественного» утверждения
- Программа Гильберта

Утверждение, которое вы сейчас видите на экране, –

ложно.

Формализация

Утверждение в формальном языке, говорящее о собственной ложности

- Ложность (истинность) можно понимать по-разному.

Арифметики

Арифметика = «Настоящие» натуральные числа и операции.

Можно рассматривать слова в алфавите 0,1 (алфавит **B**) и операции над ними, через которые определять арифметические операции.

Можно рассматривать отношения вместо операций.

Арифметики

Существует много структур, не изоморфных Настоящим натуральным числам (с операциями), но со всеми свойствами натуральных чисел.

– то есть они имеют ту же теорию

– обсуждалось раньше (нестандартные модели с бесконечно большими элементами...)

Желаемое:

• Все свойства натуральных чисел могут быть выведены из некоторых Аксиом.

Арифметика Пеано

Аксиомы, в добавление к аксиомам исчисления логики отношений

Аксиомы Пеано (замыкания формул, т. е. $\forall$ впереди)

1. Аксиомы равенства для S, +, $\times$,

2. $\neg\, S(x) = 0, \quad S(x) = S(y) \rightarrow x = y$,

3. $x + 0 = x, \quad x + S(y) = S(x + y)$,

4. $x \times 0 = 0, \quad x \times S(y) = x \times y + x$,

5. (Схема аксиом индукции)

$(\Phi(x) \wedge \forall u(\Phi(u) \rightarrow \Phi(S(u)))) \rightarrow \forall u\Phi(u)$,

для любой формулы Φ.

(У Джузеппе Пеано аксиомы были другие.)

Этих аксиом оказывается достаточно для известных доказательств в теории чисел.

7

Арифметики

Реальность:

- Не существует системы аксиом, из которых могут быть выведены все свойства («настоящих») натуральных чисел, записываемые в логике отношений (и только они).
  - в частности, не годится система аксиом Пеано
  - тема сегодня

Кодирование

- Нам нужно в языке говорить о формулах самого языка.
- Структура – ансамбль слов в алфавите {0, 1}. Отношения введем постепенно.
- Язык логики отношений.
- Слова в алфавите языка логики отношений кодируются в алфавите {0, 1}.

Задача. Придумать способ кодирования слов в любом алфавите словами в **B**.

- Цепочки слов – тоже кодируются.

Задача. Придумать способ кодирования цепочек слов.

Структура M (вариант арифметики)

Область – слова в алфавите {0,1}.

В сигнатуре есть 0,1 может быть операция приписывания слов, могут быть, кроме этого, +, × и др. Слова в алфавите {0,1} – термы (но могут быть и другие термы).

Задача. Как обойтись в дальнейших рассуждений без функций, используя только символы для отношений.

Условие на структуру: Выразима функция подстановки:

Подст: Код слова, получаемого подстановкой вместо свободной переменной *x*
второго аргумента

в формулу, кодом которой является первый аргумент.

Пусть Г – формула с одной свободной переменной *x*. Что такое

Подст (код Г, код Г)?

Это – код Г (код Г).

Гёделева диагональ

- Ф – какая-то формула с одной свободной переменной
- Г = $\neg$ Ф (Подст(*x*,*x*))
- Г (код Г) = $\neg$ Ф (Подст (код Г, код Г)) = $\neg$ Ф (код Г (код Г))

Теорема Тарского. Не существует формулы Ф в заданной сигнатуре, выражающей свойство: «быть кодом истинного в М утверждения».

Д. Предположим, такая формула Ф существует. Построим Г для Ф.

Пусть: Г (код Г) – истинно. **Тогда**:

Ф (код Г (код Г)) – истинно (Предпол.),
$\neg$ Ф (код Г (код Г)) – ложно, т.е.
Г (код Г) – ложно (см. выше).

Пусть: Г (код Г) – ложно. **Тогда**:

Ф (код Г (код Г)) – ложно (Предпол.),
$\neg$ Ф (код Г (код Г)) – истинно,
Г (код Г) – истинно.

Гёделева диагональ

- Ф – формула с одной свободной переменной
- Г = $\neg$ Ф (Подст(x,x))
- Г (код Г) = $\neg$ Ф (Подст (код Г, код Г)) = $\neg$ Ф (код Г (код Г))

Пусть в нашей структуре M для всякого исчисления над алфавитом {0,1} выразимо свойство «быть кодом породимого (выводимого) в этом исчислении слова».

Теорема Гёделя о неполноте. Не существует исчисления, порождающего в точности истинные в нашей структуре формулы.

Д. Пусть такое исчисление существует, и Ф выражает свойство «быть кодом породимого слова».

Пусть: Г (код Г) – истинна. **Тогда**: она выводима.

Ф (код Г (код Г)) – истинно,
$\neg$ Ф (код Г (код Г)) – ложно,
Г (код Г) – ложно. Противоречие

Пусть: Г (код Г) – ложна. **Тогда**: она не выводима.

Ф (код Г (код Г)) – ложно,
$\neg$ Ф (код Г (код Г)) – истинно,
Г (код Г) – истинно. Противоречие

Комментарий

- Предположение: Пусть в нашей структуре M для всякого исчисления над алфавитом $\{0,1\}$ выразимо свойство «быть кодом породимого (выводимого) в этом исчислении слова».
- «Структура достаточно богата»
- Породимость исчислением = Породимость грамматикой – достаточно нескольких простых отношений.
- Все интересные для описания математики структуры достаточно богаты.

Теорема Геделя о неполноте

- Другое доказательство
- **Задача**. Множество истинных формул – не породимо.
- Подсказка. Всякое породимое множество можно выразить в («достаточно богатой») арифметике.
- **Задача**. Как из этих соображений получить Т. Геделя?

Теорема Геделя о неполноте

- Программа Гильберта
- Не истинность, а доказуемость
- Теорема Геделя, иная фомулировка
  – Существуют утверждения такие, что не доказуемо ни утверждение, ни его отрицание.

Программа Гильберта.

Полнота. Невозможна, в силу Теоремы Геделя о неполноте.

Непротиворечивость.

Доказательство невозможности получить противоречие надежными, «финитными» средствами (как невозможность получить какую-то позицию в шахматной игре).

Пусть в нашей структуре M для всякого исчисления над алфавитом $\{0,1\}$ выразимо свойство «быть кодом выводимого в этом исчислении слова».

Пусть Ф выражает свойство «быть кодом выводимого слова».

Аксиоматическая теория – исчисление, получаемое добавлением к исчислению логики отношений каких-то аксиом.

Формула Непр = $\neg$ Ф (код 0), здесь 0 – Ложь, из нее выводится все.

Вторая теорема Гёделя о неполноте. Не существует непротиворечивой аксиоматической теории, в которой выводимо утверждение о ее непротиворечивости.

То есть Непр - невыводимо.

Задача. Как может выглядеть доказательство?

Таким образом, непротиворечивость не может быть установлена не только «финитными» средствами, но даже средствами самой теории.

Соотношение с обычной арифметикой

- Сигнатура приписывания не менее естественна, чем сигнатура сложения и умножения.
- В рассматриваемой сигнатуре могут быть +, $^{\times}$.
- Подстановка и выводимость («быть кодом выводимой формулы») могут быть выражены через приписывание, а приписывание – через +, $^{\times}$. Приписывание несущественно расширяет арифметику.

Программа Гильберта

- Арифметика Пеано не полна.
- Теория множеств (она будет сформулирована) – не полна (или противоречива).
- Доказательство непротиворечивости невозможно.
- Возможна ли математика?

Естественные недоказуемые утверждения

- Важные теоремы и проблемы теории чисел, комбинаторики, математической логики, теории вычислений и т. д. можно формулировать в арифметике.
- Постепенно для них удается найти доказательства, решения и т. д.
- Теорема Геделя показывает, что иногда это может быть и не так – возможны утверждения, для которых доказательство или опровержение (в теории Пеано) не будет найдено никогда.
- Однако в теореме Геделя утверждение «диагональное», «самоприменимое», «специально построенное», говорит что-то о самой теории и доказуемости и т. д.
- Есть ли «естественные» утверждения арифметики, не доказуемые и не опровержимые?

Истинное, но не доказуемое в PA утверждение

Червь Беклемишева

- *Червём* будем называть произвольную цепочку натуральных чисел.
- *Нос* червя – последний элемент цепочки.
- *Голова* червя – максимальный конец цепочки(включая нос), все элементы которого не меньше носа.
- *Хвост* червя – оставшаяся начальная часть последовательности (хвост может быть пустым).
- В примерах голова – красная (нос – тёмно-красный), хвост – зелёный:

(а) 7 6 1 2 3 **4 6 5 4**

(б) 7 6 1 2 3 4 6 3 **4**

(в) **7 6 1 2 3 4 6 3 0 1 0 0 0**

(г) **3 7 6 7 8 9 8 4 6 3 3 4 3**

Истинное, но не доказуемое в РА утверждение

Эволюция червя

- Эволюция червя происходит по шагам. После каждого шага заново определяем, где у червя хвост, голова, нос.
- Если нос равен 0, то отрезаем его, и на следующем шаге цепочка становится на 1 короче.
- Если на (k-1)-м шаге нос не равен 0, то на k-м шаге к голове червя приделываем ещё k копий головы и в каждой из (k+1) копий нос уменьшаем на 1.
- Пример 1:

  w_0 = **0**

  $w_1 = \Lambda$

  Пример 2:

  w_0 = **1**

  w_1 = **0 0**

  w_2 = **0**

  $w_3 = \Lambda$

Истинное, но не доказуемое в PA утверждение
Эволюция червя. Пример 3.

- w_0 = 2
- w_1 = 1 1
- w_2 = 1 0 1 0 1 0 w_3 = 1 0 1 0 1 w_4 = 1 0 1 0 0 0 0 0 0
- w_5 = 1 0 1 0 0 0 0 0 w_6 = 1 0 1 0 0 0 0
- w_7 = 1 0 1 0 0 0 w_8 = 1 0 1 0 0
- w_9 = 1 0 1 0
- w_{10}= 1 0 1
- w_{11}= 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
- . . .
- w_{23} = 1 0 w_{24} = 1 w_{25} = $0\ 0^{25}$
- ...
- w_{50} = 0
- w_{51} = Λ

Истинное, но не доказуемое в PA утверждение
Эволюция червя. Пример 4.

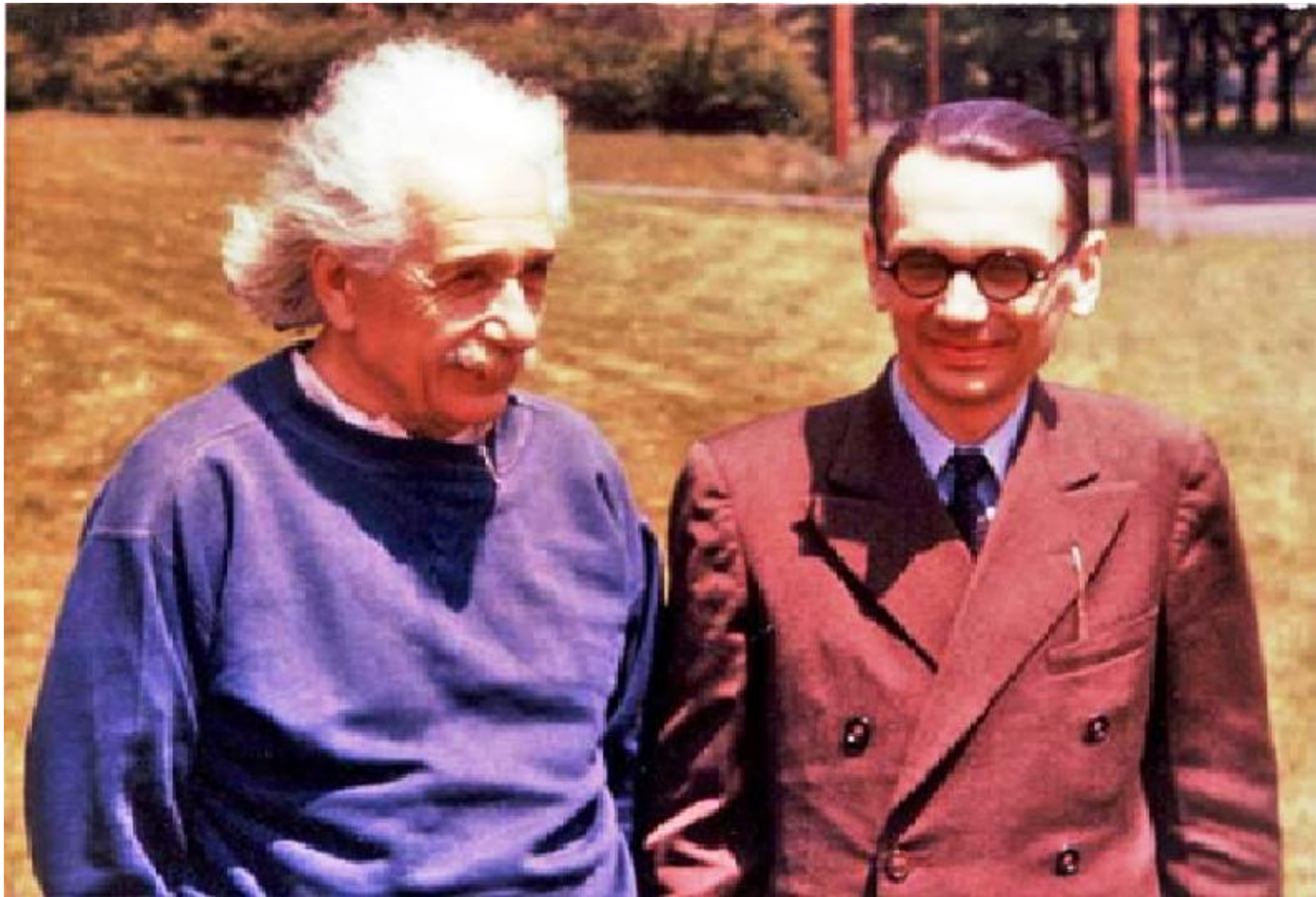
- w_0 = **3**
- w_1 = **2 2**
- w_2 = **2 1 2 1 2 1**
- w_3 = **212120 212120 212120 212120**
- w_4 = **212120 212120 212120 21212**
- w_5 = **212120 212120 212120 2121 111111**
- w_6 = $(212120)^3\ (2121111110)^7$
- w_7 = $(212120)^3\ (2121111110)^6$ **212111111**
- w_8 = $(212120)^3\ (2121111110)^6\ (212111110)^9$
- w_9 = $(212120)^3\ (2121111110)^6\ (212111110)^8$ **21211111**
- w_{10}= $(212120)^3\ (2121111110)^6\ (212111110)^8\ (21211110)^{11}$
- . . .

Истинное, но не доказуемое в PA утверждение

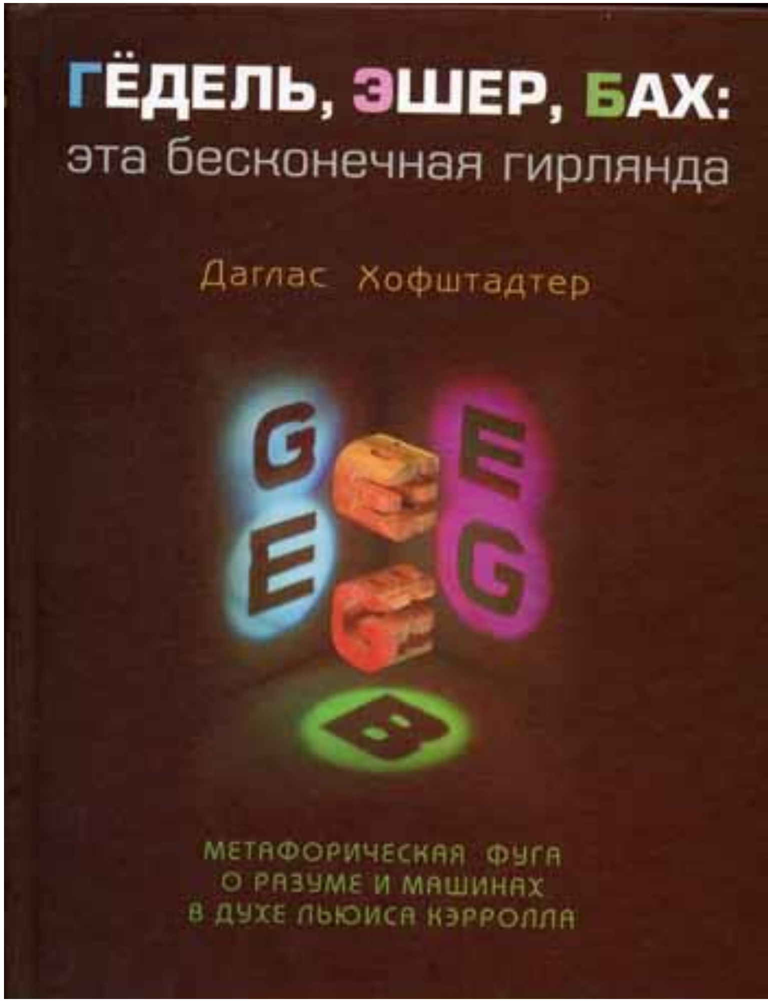
- **Утверждение.** Любой червь в процессе эволюции рано или поздно (но скорее поздно, чем рано) исчезнет (превратится в пустую цепочку).
- **Задача**. Доказать утверждение.
- **Утверждение.** Предыдущее утверждение истинно, но не доказуемо в арифметике Пеано PA.

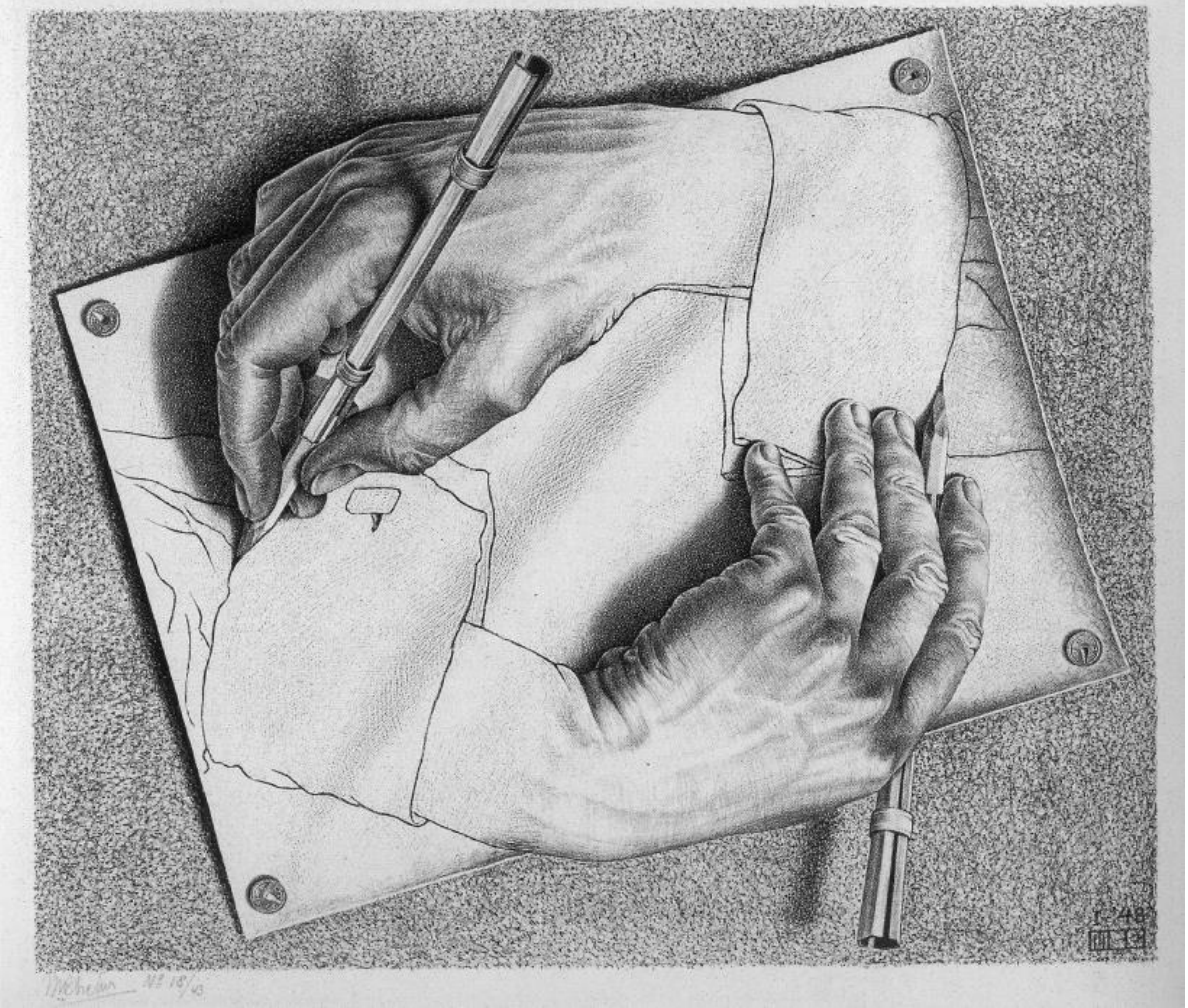
Теорема Гёделя

- Пропасть между доказуемостью и истинностью, между математикой и реальностью



В 1999 году
"Time magazine"
провозгласил
Гёделя
величайшим
математиком
XX века и включил
его в список
"Ста великих людей
столетия".





1930

- Вена, Венский кружок
- Курт Гедель (род. 1906)
- Диссертация Геделя (1929) – теорема о полноте

1930

- Kurt Gödel Теорема о неполноте (лето 1930), разговор во вторник, 26 августа, в Cafe Reichsrat, в котором участвует Карнап (рассказавший об этом в своем дневнике) и, возможно, еще пара членов Венского кружка.

1930

- Д. Гильберт родился (в 1862 г.) под Кенигсбергом (Wehlau – Знаменск), возможно, в самом Кенигсберге (Калининграде).
- 5-7 сентября International Conference on the Epistemology of the Exact Sciences (Königsberg).
  - В нем участвуют виднейшие специалисты по логике и основаниям математике (в частности, члены Венского кружка.
- 5 сентября Доклад Дж. Фон Неймана о Программе Гильберта
- 6 сентября выступление Геделя с теоремой о полноте
  - Воспринято, как очевидное (так мы исчисление и строили).
- 7 сентября заключительный круглый стол. Замечание Геделя с теоремой о неполноте.
  - Не замечено никем, кроме фон Неймана.
- 8 сентября – открытие Съезда немецких ученых и врачей. Знаменитое выступление Гильберта: в математике не может быть непознаваемого, всякая проблема будет решена.

1930

- Не верьте тем, кто сегодня философствуют и предсказывают падение культуры и неизбежность непознаваемого (ignorabimus).
- Для нас, как и для всех естественных наук, не существует непознаваемого. Нашим девизом должно быть:
- Мы должны знать - мы будем знать!

Задача. Как быть?