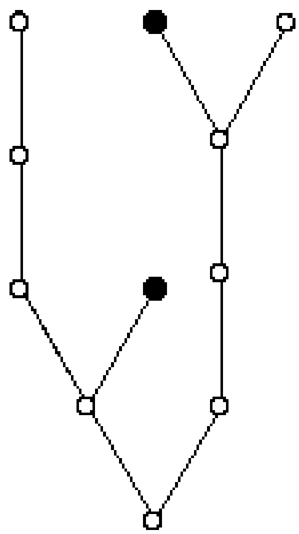
Лекция 8 (25.10.2014)

Мы познакомимся с конструкцией, которая строит модель заданной теории. Конструируя модель мы будем для данной теории строить цепочку конечных деревьев: $T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_n \subset \ldots$. Дерево T_i выглядит примерно так:

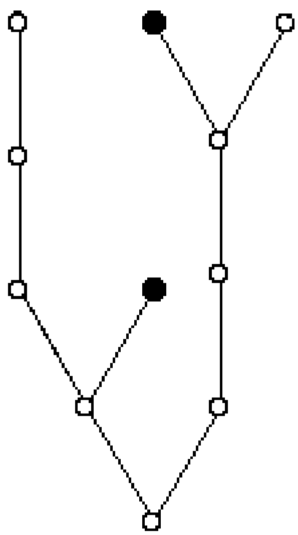
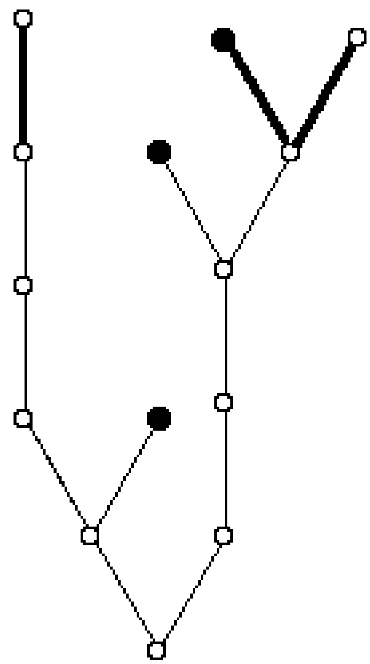


Прежде всего договоримся о некоторой стандартной терминологии. Элементы дерева называются *вершинами*, одна из вершин является наименьшей – она называется *корнем*, вершины, непосредственно большие вершины v называются *сыновьями* вершины v. В нашем примере у корня два сына. В дереве T_i у каждой вершины не более двух сыновей, такие деревья называются *двоичными*. В обсуждаемой конструкции используются только двоичные деревья. Вершины, у которых нет сыновей, называются *листьями*, в данном дереве 4 листа. *Ветвью* дерева называется такая (конечная или бесконечная) цепочка вершин $v_0, \ldots, v_i, \ldots$ что вершина v_{i+1} является сыном вершины v_i.

Наше описание дерева весьма неформально, Вы можете использовать более формальный подход. Можно считать, что двоичное дерево – это такое множество Tr слов в алфавите $\{0, 1\}$, что если слово v принадлежит Tr, то Tr принадлежит и любое начало слова v. Другой подход состоит в том, чтобы точно описать, каким условиям должно удовлетворять упорядоченное множество, являющееся деревом.

Опишем теперь в общих чертах, как дерево T_{i+1} строится по дереву T_i. Некоторые листья дерева T_i "мертвые" – они помечены черным цветом, остальные листья – "живые". Дерево T_{i+1} получается из дерева T_i

добавлением одного или двух ростков к каждому живому листу исходного дерева (новые ростки показаны жирными линиями):

T_i :  $\Rightarrow T_{i+1}$: 

Прежде чем детальнее описать процесс построения дерева T_{i+1} заключим некоторые технические соглашения. Во-первых, мы считаем, что в формулы входят лишь следующие логические символы: $\vee, \neg, \exists$. Это, конечно, не ограничивает возможности нашего языка: формулу $\forall(x)\Phi(x)$ можно считать сокращение формулы $\neg\exists(x)\neg\Phi(x)$, аналогично и все прочие логические символы выразимы через $\vee, \neg, \exists$. Во-вторых, в течение данной лекции мы называем теорией не одно множество формул, а два: теория Γ – это пара множеств формул (Γ^+, Γ^-), структура M считается моделью теории Γ, если в M истинны все формулы из Γ^+(положительной компоненты Γ) и ложны все формулы из Γ^- (отрицательной компоненты Γ). Ясно, что такое обобщение понятия теории является чисто техническим: "обычные" теории – это пары вида $(\Gamma^+, \varnothing)$, а теория (A^+, A^-) равносильна теории $(B, \varnothing)$, где множество B состоит из A^+, к которому добавлены отрицания всех формул из A^-.

Итак, вернемся к построению дерева T_{i+1}. Вершине v каждого дерева сопоставлена некоторая теория Γ_v, содержательно процесс построения дерева состоит в том, что мы пытаемся выяснить, есть ли модели у теорий, указанных в вершинах. Лист дерева v считается *мертвым*, если $\Gamma_v^+ \cap \Gamma_v^- \neq \varnothing$, то есть некоторая формула содержится как в положительной, так и отрицательной компоненте теории. Очевидно, что у такой теории нет моделей – продолжать исследование дерева в этой вершине бесполезно.

Пусть v – живой лист дерева T_i и (Γ_v^+, Γ_v^-) – теория, сопоставленная листу v. У нас имеется некоторая процедура выбора, сопоставляющая вершине

v некоторую неатомную формулу $\Psi \in \Gamma_v^+ \cup \Gamma_v^-$. Мы подробнее обсудим эту процедуру в дальнейшем, сейчас же будем считать, что такая процедура существует и укажем, как, в зависимости от формулы Ψ, к вершине v добавляются сыновья.

(i) $\Psi \in \Gamma_v^+$, Ψ имеет вид $\neg\Phi$. Добавляем одного сына $v0$ с теорией $\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^- \cup \{\Phi\}$.

(ii) $\Psi \in \Gamma_v^-$, Ψ имеет вид $\neg\Phi$. Полностью аналогично пункту (i) с заменой + на -.

(iii) $\Psi \in \Gamma_v^+$, Ψ имеет вид $\exists(x)\Phi(x)$. Берем произвольный новый символ константы c, не входящий в формулы из $\Gamma_v^+ \cup \Gamma_v^-$ и добавляем одного сына $v0$ с теорией $\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+ \cup \{\Phi(c)\}, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^-$.

(iv) $\Psi \in \Gamma_v^-$, Ψ имеет вид $\exists(x)\Phi(x)$. Пусть C – список всех символов констант, встречающихся в формулах из $\Gamma_v^+ \cup \Gamma_v^-$. Добавляем одного сына $v0$ с теорией $\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^- \cup \{\Phi(c) | c \in C\}$.

(v) $\Psi \in \Gamma_v^+$, Ψ имеет вид $\Phi_0 \vee \Phi_1$. Добавляем двух сыновей $v0$ и $v1$ с теориями $\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+ \cup \{\Phi_0\}, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^-$ и $\Gamma_{v1}^+ = \Gamma_v^+ \cup \{\Phi_1\}, \Gamma_{v1}^- = \Gamma_v^-$.

(vi) $\Psi \in \Gamma_v^-$, Ψ имеет вид $\Phi_0 \vee \Phi_1$. Добавляем одного сына $v0$ с теорией $\Gamma_{v0}^+ = \Gamma_v^+, \Gamma_{v0}^- = \Gamma_v^- \cup \{\Phi_0, \Phi_1\}$.

Заметим, что вид дерева T_{i+1} существенно зависит от того, какие именно формулы выбираются в живых листах дерева T_i – напомним, что мы собираемся обсудить процедуру выбора, сопоставляющая листу дерева формулу в соответствующей теории, позже.

Кроме того, заметим, что лишь в случае (v) у листа появляется два сына и во всех случаях теории расширяются – обе компоненты теории сына не меньше соответствующих компонент теории родителя.

Если $T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_n \subset \dots$ – цепочка деревьев, построенная описанным способом, то можно рассмотреть дерево $T^* = \bigcup T_i$. Процесс построения цепочки деревьев может остановиться – мы построим дерево T_i, у которого все листья мертвые: дальше дерево расти не будет и в этом случае $T^* = T_i$. В противном случае дерево T^* бесконечно.

Теория (A^+, A^-) *конечно совместна*, если ее любая конечная подтеория имеет модель, то есть совместна любая пара (B^+, B^-), где $B^+ \subset A^+, B^- \subset A^-, B^+, B^-$ – конечны.

Лемма 1. *Если вершине v в дереве T^* соответствует конечно совместная теория, то, независимо от процедуры выбора формул, одному из детей вершины v соответствует конечно совместная теория.*

Доказательство. Следует рассмотреть случаи (i) – (vi) и от противного убедиться, что у вершины с конечно совместной теорией есть такой же сын. Здесь мы, для примера, рассмотрим случаи (iii) и (v).

(iii) ($\Psi \in \Gamma_v^+$, Ψ имеет вид $\exists(x)\Phi(x)$). Теория сына имеет вид $\Gamma_{v0} = (\Gamma^+ \cup \{\Phi(c)\}, \Gamma_{v0}^- = \Gamma^-)$, пусть $(A^+ \cup \{\Phi(c)\}, A^-)$ – конечная несовместная подтеория Γ_{v0}, где $A^+ \subset \Gamma^+, A^- \subset \Gamma^-$. Рассмотрим теорию $(A^+ \cup \{\exists(x)\Phi(x)\}, A^-)$ – конечную подтеорию Γ. У нее есть модель M, эта же структура является моделью и теории $(A^+ \cup \{\Phi(c)\}, A^-)$, если символу константы c сопоставить любой элемент $a \in M$, такой, что $M \models \Phi(a)$ – противоречие.

(v) ($\Psi \in \Gamma_v^+$, Ψ имеет вид $\Phi_0 \vee \Phi_1$). Теории двух сыновей имют вид $\Gamma_{v0}^+ = \Gamma^+ \cup \{\Phi_0\}, \Gamma_{v0}^- = \Gamma^-$ и $\Gamma_{v1}^+ = \Gamma^+ \cup \{\Phi_1\}, \Gamma_{v1}^- = \Gamma^-$. Пусть $(A^+ \cup \{\Phi_0\}, A^-)$ и $(B^+ \cup \{\Phi_1\}, B^-)$ – конечные несовместные подтеории теорий Γ_{v0}^+ и Γ_{v1}^+ соответственно. Рассмотрим конечную подтеорию $(A^+ \cup B^+ \cup \{\Phi_0 \vee \Phi_1\}, A^- \cup B^-)$ теории Γ – по предположению у нее есть модель M. Поскольку $M \models \Phi_0 \vee \Phi_1$, то $M \models \Phi_0$ или $M \models \Phi_1$ и, следовательно, M является моделью теории $(A^+ \cup \{\Phi_0\}, A^-)$ или теории $(B^+ \cup \{\Phi_1\}, B^-)$ – противоречие. □

Напомним, что последовательность вершин $v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots$ называется *ветвью*, если вершина v_{i+1} является сыном вершины v_i.

Лемма 2. *Если вершине v в дереве T^* соответствует конечно совместная теория, то, независимо от процедуры выбора формул, в дереве T^* существует бесконечная ветвь, проходящая через вершину v.*

Доказательство. Если вершине v в дереве T^* соответствует конечно совместная теория, то вершина, конечно, живая. Будут порождены ее сыновья, одному из которых, по лемме 1, тоже соответствует конечно совместная теория – последовательность этих вершин и образует бесконечную ветвь. □

Теперь рассмотрим подробнее процедуру выбора формул: функцию, которая вершине v дерева T^* сопоставляет формулу из $\Gamma_v^+ \cup \Gamma_v^-$. Мы скажем, что процедура выбора *корректна*, если в любой бесконечной ветви $v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots$ для любой формулы $\Phi \in \Gamma_{v_0}^+ \cup \Gamma_{v_0}^-$ найдется вершина v_i, которой процедура сопоставит формулу Φ.

Постройте корректную процедуру выбора формул.

Лемма 3. *Если дерево T^* построено с использованием корректной процедуры выбора и через вершину v проходит бесконечная ветвь, то теория, соответствующая вершине v совместна.*

Доказательство. Пусть существует бесконечная ветвь $v, v_1, \ldots$. Обозначим через $A^+ = \bigcup \Gamma_{v_i}^+, A^- = \bigcup \Gamma_{v_i}^-$ и рассмотрим теорию $\Gamma^* = (A^+, A^-)$. Мы утверждаем, что у теории Γ^* есть модель. Отсюда следует утверждение леммы, поскольку Γ^* является расширением любой из теорий, соответствующих вершинам$v, v_1, \ldots$

Определим структуру M следующим образом: носителем структуры M является множество символов констант, входящих в формулы из $A^+ \cup$

A^-. Отношение $R(x_0, \ldots, x_n)$ из сигнатуры теории Γ^* истинно на наборе $a_0, \ldots, a_n \in M$ если $R(a_0, \ldots, a_n) \in A^+$.

Индукцией по построению формулы Φ докажем, что $\Phi \in A^+ \Rightarrow M \models \Phi; \Phi \in A^- \Rightarrow M \models \neg\Phi$.

Мы рассмотрим лишь несколько случаев, разбор всех случаев оставляем слушателям.

(0) Φ – атомная формула. Если $\Phi \in A^+$, то $M \models \Phi$ по определению структуры M. Если $\Phi \in A^-$, то $\Phi \notin A^+$, поскольку все вершины на бесконечной ветви живые. Значит, по определению структуры M, $M \models \neg\Phi$.

(1) $\Phi = \exists(x)\Psi(x), \Phi \in A^-$. Мы должны показать, что $M \models \neg\Psi(c)$ для любого элемента (символа константы) $c \in M$. По индуктивному предположению достаточно доказать, что $\Psi(c) \in A^-$ для любого элемента $c \in M$. Поскольку $c \in M$, то существует такая вершина v_i на данной ветви, что $\Phi \in \Gamma^-_{v_i}$, символ c входит в одну из формул из $\Gamma^+_{v_i} \cup \Gamma^-_{v_i}$. Поскольку использовалась корректная процедура выбора формул, найдется такое $j > i$, что в вершине v_j была выбрана формула Φ. Тогда, в соответствии с пунктом (iv), $\Gamma^-_{v_{j+1}}$ содержит формулу $\Psi(c)$. $\square$

Теорема компактности. *Если теория конечно совместна, то у нее есть модель.*

Доказательство. Пусть Γ – конечно совместная теория, дерево T_0 состоит из одной вершины – корня, которой сопоставлена теория Γ. Используя корректную процедуру выбора построим цепочку $T_0 \subset \ldots T_i \subset \ldots$ и дерево T^*. По лемме 2 в дереве T^* есть бесконечная ветвь, по лемме 3 у теории Γ есть модель. $\square$

Мы скажем, что у дерева *конечное ветвление*, если у каждой вершины конечное число сыновей.

Априори построенное дерево T^* и цепочка $T_0 \subset \ldots T_i \subset \ldots$ могут быть одного их 3х типов: (0) для некоторого $i, T_i = T_{i+1}$, дерево T^* конечно и теория, соответствующая корню дерева, несовместна; (1) в дереве T^* есть бесконечна ветвь – у теории, соответствующей корню дерева, есть модель; (2) дерево T^* бесконечно и не содержит бесконечных ветвей.

Однако лемма Кёнига гарантирует нам, что в нашем случае деревьев типа (2) быть не может:

Лемма Кёнига. *В бесконечном дереве с конечным ветвлением есть бесконечный путь.*

Докажите лемму Кёнига.

Нетрудно написать алгоритм (программу), который, получив на вход конечную теорию, строит цепочку деревьев, корню которых соответствует данная теория.

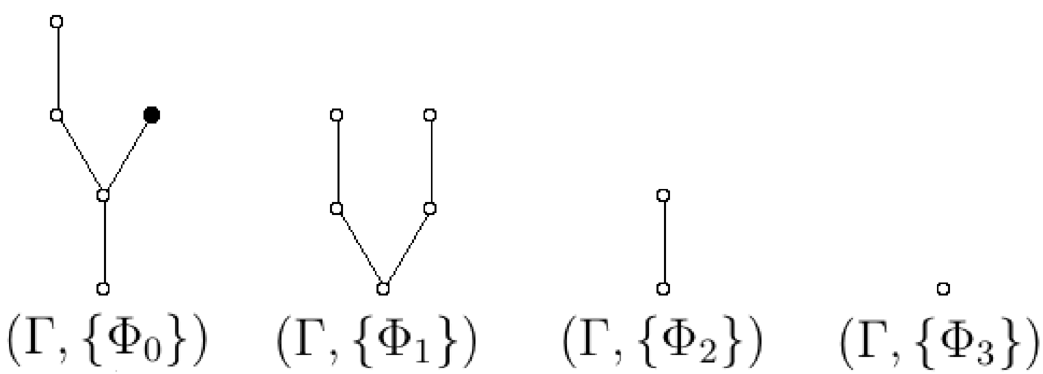
Утверждение 1. *Если конечная теория* Γ *совместна и полна, то существует алгоритм, который по утверждению* Φ *определяет, следует ли утверждение из теории (отношение следования из* Γ *разрешимо).*

Доказательство. Следует одновременно выращивать два дерева: одно для теории $(\Gamma, \{\Phi\})$, другое – для теории $(\Gamma, \{\neg\Phi\})$. Поскольку одна из этих теорий несовместна, рост одного из деревьев когда-нибудь прекратиться. □

Утверждение 2. *Существует алгоритм, который по конечной теории* Γ *перечисляет все утверждения, следующие из теории и только их (отношение следования перечислимо).*

Доказательство. Выпишем все утверждения $\Phi_0, \dots, \Phi_i, \dots$ в нужной сигнатуре и будем последовательно выращивать деревья, корням которых соответствуют теории $(\Gamma, \{\Phi_0\}), \dots, (\Gamma, \{\Phi_i\}), \dots$. На шаге с номером $n+1$ мы добавляем ростки к уже имеющимся деревьям $1, \dots, n$ и сажаем новое дерево, корню которого соответствует теория $(\Gamma, \{\Phi_n\})$.

Четвертый шаг работы алгоритма:



□

В нашей конструкции построения модели есть существенный пробел, и сейчас необходимо его исправить. Дело в том, что в сигнатурах есть выделенный символ отношения – символ ”=”. Все прочие символы мы можем интерпретировать как угодно, этому же символу должно соответствовать равенство, совпадение элементов структуры. Однако в нашей конструкции символ ”=” рассматривался наравне с прочими и его интерпретация в построенной модели не будет, скорее всего совпадать с равенством.

Для устранения этого недостатка сопоставим теории Γ теорию $\Gamma^{\approx}$ следующим образом:

(1) Добавим к сигнатуре новый символ двуместного отношения $\approx$ и добавим к теории Γ аксиомы, утверждающие, что это отношение эквивалентности:

(1.1) $\forall(x)(x \approx x)$

(1.2) $\forall(x, y)(x \approx y \equiv y \approx x)$

(1.3) $\forall(x, y, z)((x \approx y \wedge y \approx x) \to x \approx z)$

(2) Для каждого символа отношения R исходной сигнатуры добавим аксиому, утверждающую, что R не различает эквивалентные элементы:

$$\forall(\bar{x}, \bar{y})((x_0 \approx y_0 \wedge x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n) \to R(\bar{x}) \equiv R(\bar{y}))$$

(3) Во всех формулах теории Γ заменим символ ”=” на символ ”$\approx$”.

Модели теории $\Gamma^{\approx}$, в которых символу ”$\approx$” сопоставлено равенство, называются *нормальными*, эти модели совпадают с моделями теории Γ. С другой стороны, нетрудно видеть, что любую модель M теории $\Gamma^{\approx}$ можно нармолизовать: носителем нормализованной модели являются классы эквивалентности $M/\approx$, отношения сигнатуры заданы естественным образом.

Таким образом при построении модели мы можем вместо теории Γ использовать теорию $\Gamma^{\approx}$ и далее, нормализовав модель, получить модель теории Γ.

Историческая справка. Историческая справка, приведенная в конце данной лекции, подробно обсуждается в лекции 9.