Лекция 6 (11.10.2014)

1. Теория Γ_Q

Утверждение. Теория Γ_Q полна.

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 – две не эквивалентные модели теории Γ_Q, то есть $M_1 \vDash \phi$ и $M_2 \vDash \neg\phi$ для некоторого предложения ϕ. Ни одна из этих моделей не может быть конечной (почему?). Обе модели не могут быть счетными (почему?). Если одна из этих моделей несчетна (скажем M_1), то мы заменим ее (по тереме Лёвенгейма – Сколема) счетной элементарной подмоделью M_1' и придем к противоречию. $\square$

Теория *ω-категорична* — все счетные модели теории изоморфны.

Категоричность в общем случае определяется аналогично, как изоморфизм равномощных структур.

По существу мы доказали

Признак Лося – Воота. *Совместная ω-категоричная теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей, полна.*

Имеет место и обобщение этого признака для общего случая категоричности.

Мы, однако, не будем доказывать признак Лося – Воота в общем виде, а вернемся к рассмотрению теории Γ_N.

2. Теория Γ_N

Пусть M – произвольная модель теории Γ_N, a, b – некоторые элементы M. Мы скажем, что элементы a, b структуры M *близки*, если между a и b находится лишь конечное число элементов. Более формально: элементы $a \leqslant b (b \leqslant a)$ близки, если множество $c \in M, a \leqslant c \leqslant b (b \leqslant c \leqslant a)$ конечно. Отношение близости является отношением эквивалентности на носителе структуры M, классы эквивалентности этого отношения называются *галактиками*, галактика, содержащая элемент a обозначается $\tilde{a}$.

Вопросы. Как устроена галактика $\tilde{0}$? Как устроены все прочие галактики?

Мы определим порядок на галактиках так, что $\tilde{a} < \tilde{b}$ если $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ и $a < b$.

Вопросы. Корректно ли определен порядок? Будет ли порядок на галактиках линейным? Есть ли среди галактик наименьшая?

Пусть $\mathbb{N} = \langle N, \{0, 1, 2, \ldots, <, +, \times\}, \mathbf{Зн}_0\rangle$ — натуральный ряд с естественным соответствием $\mathbf{Зн}_0$.

Техническое замечание. До сих пор мы рассматривали сигнатуры, в которых встречались символы констант и отношений, в данной сигнатуре у нас встречаются символы функций – $+, \times$. Это обобщение является чисто технической проблемой. Есть два способа решить эту проблему.

Во-первых, можно, конечно, обобщить понятие интерпретации, включив в него сопоставление функциональным символам функций соответствующей арности на области (носителе) структуры. Все сформулированные ранее утверждения сохранятся.

Во-вторых, можно каждому функциональному символу от n переменных сопоставить символ соответствующего отношения от $n+1$ переменных (так, в частности, символу $+$ сопоставим символ $R_+(x,y,z)$, символу $\times$ – $R_\times(x,y,z)$, причем интерпретируются они так, что $R_+(n_1,n_2,n_3) \Leftrightarrow n_1+n_2=n_3, R_\times(n_1,n_2,n_3) \Leftrightarrow n_1 \cdot n_2 = n_3$) и считать, что в сигнатуру входят не имена функций, а имена соответствующих отношений. В этом случае формулы станут более громоздкими, но по-существу ничего не изменится. *Конец технического замечания.*

Пусть c — новое имя константы, рассмотрим теорию $\mathrm{Th}_{\mathbb{N}} \cup \{c \neq i \mid i \in N\}$. По теореме компактности данная теория совместна.

Вопрос. Почему каждое конечное подмножество данной теории имеет модель?
Моделью для конечного подмножества является обычный натуральный ряд с подходящей интерпретацией для константы c.

Пусть $\mathbb{N}^*$ – некоторая счетная модель данной теории. Такие структуры называются *нестандартными арифметиками*, они устроены достаточно сложно и их рассмотрение выходит за рамки нашего курса. В данном случае нас интересует в основном порядок на структуре $\mathbb{N}^*$ – обозначим через $\mathbb{N}^*_<$ структуру, полученную из $\mathbb{N}^*$ удалением всех отношений, кроме $<$ и константы 0: носители структур $\mathbb{N}^*$ и $\mathbb{N}^*_<$ совпадают, сигнатура структуры $\mathbb{N}^*_<$ – это $\{<,0\}$, интерпретации символов $<$ и 0 в структурах $\mathbb{N}^*$ и $\mathbb{N}^*_<$ совпадают.

Вопрос. Структура $\mathbb{N}^*_<$ зависит от выбора модели $\mathbb{N}^*$. Может ли структура $\mathbb{N}^*_<$ оказаться изоморфной $\mathbb{N}_<$?

Заметим, что по построению структура $\mathbb{N}^*_<$ эквивалентна $\mathbb{N}_<$ (фактически она является элементарным расширением $\mathbb{N}_<$, поскольку $\mathbb{N}_<$ изоморфна $\tilde{0}$), поэтому она заведомо является моделью теории Γ_N.

Вопрос. Верно ли, что порядок на галактиках $\mathbb{N}^*_<$ совпадает с $\mathbb{Q}^+_<$, причем $\tilde{0}$ соответствует 0 в $\mathbb{Q}^+$ ($\mathbb{Q}^+$ – множество неотрицательных рациональных чисел)?
Да. В структуре $\mathbb{N}^*$ для каждого элемента a существует "гораздо больший" элемент c_1, такой, что $c_1 = a+a$, "гораздо меньший" элемент c_2, такой, что $c_2+c_2 = a$ или $c_2+c_2 = a+1$ и для любых элементов a, b есть "промежуточный" элемент c_3, такой, что $c_3+c_3 = a+b$ или $c_3+c_3 = a+b+1$. Покажите, что если $a, b \notin \tilde{0}, \tilde{a} \neq \tilde{b}$, то все элементы a, b, c_1, c_2, c_3 лежат в разных галактиках.

Вопрос. Верно ли, что порядок в структуре $\mathbb{N}^*_<$ совпадает с порядком $N + Z \times Q$?

Подструктуру M структуры $\mathbb{N}^*_<$ назовем *правильной*, если для любого $a \in M$ выполнено $\tilde{a} \subset M$. Заметим, что $0 \in M$, поскольку M – подструктура.

Утверждение. *Любая правильная подструктура структуры $\mathbb{N}^*_<$ является элементарной подструктурой.*

Доказательство. Пусть M – правильная подструктура. По критерию Тарского – Воота достаточно показать, что для любой формулы $\Phi(\bar{x}, y)$ и любых элементов $\bar{a} \in M$, если $\mathbb{N}^*_< \vDash \Phi(\bar{a}, b)$ для некоторого $b \in \mathbb{N}^*_<$, то $\mathbb{N}^*_< \vDash \Phi(\bar{a}, b')$ для некоторого $b' \in M$.

В натуральном ряду $\mathbb{N}_<$ выполняется свойство индукции: любое непустое подмножество содержит минимальный элемент, поэтому

$$\mathbb{N}_< \vDash \forall \bar{u}(\exists v \Phi(\bar{u}, v) \to \\ \exists v'(\Phi(\bar{u}, v') \wedge \forall w(w < v' \to \neg\Phi(\bar{u}, w))))$$

Поскольку структура $\mathbb{N}^*_<$ эквивалентна структуре $\mathbb{N}_<$, то данная формула истина и в $\mathbb{N}^*_<$. Тогда
$\mathbb{N}^*_< \vDash \Phi(\bar{a}, b') \wedge \forall w(w < b' \to \neg\Phi(\bar{a}, w))$ для некоторого $b' \in \mathbb{N}^*_<$.

Мы утверждаем, что $b' \in M$. Пусть $b' \notin M$. Определим отображение ψ на $\mathbb{N}^*_<$ следующим образом. На множестве M отображение ψ тождественно, то есть $\psi(a) = a, a \in M$. Если $a \notin M$, то $\psi(a)$ – непосредственный предшественник элемента a, то есть $\psi(a)$ – наибольший элемент, меньший a. Поскольку M – правильная подструктура, то ψ является автоморфизмом структуры $\mathbb{N}^*_<$. Следовательно
$\mathbb{N}^*_< \vDash \Phi(\psi(\bar{a}), \psi(b'))$, то есть
$\mathbb{N}^*_< \vDash \Phi(\bar{a}, \psi(b'))$, что противоречит выбору элемента b', поскольку $\psi(b') < b'$. □

Утверждение. *Любая счетная модель теории Γ_N изморфна правильной подструктуре структуры $\mathbb{N}^*_<$, поэтому все счетные модели теории Γ_N эквивалентны.*

Эскиз доказательства. Упорядоченное множество галактик любой счетной модели теории Γ_N является не более чем счетным линейно упорядоченным множеством с наименьшем элементом – галактикой $\tilde{0}$. Любое такое множество изморфно подструктуре структуры $\mathbb{Q}^+_<$ (порядку на галактиках структуры $\mathbb{N}^*_<$), причем наименьшему элементу соответствует число 0. Кроме того очевидно, что любые две галактики, отличные от $\tilde{0}$ изоморфны, поскольку каждая из них изоморфна $\mathbb{Z}_<$.

Утверждение. *Теория Γ_N полна.*

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 – две не эквивалентные модели теории Γ_N. Они бесконечны, поэтому по теореме Лёвенгейма – Сколема можно считать, что они счетны. Это противоречит предыдущему утверждению. □

Определимые отношения

Пусть $M = \langle D, \Sigma, \textbf{Зн} \rangle$ — некоторая структура, а R — некоторое n-местное отношение на множестве D. Напомним, что мы называем R *определимым* отношением, если для некоторой формулы $\Phi(\overline{x})$ в сигнатуре Σ с n свободными переменными и любых $\overline{a} \in D$ имеет место $\overline{a} \in R \Leftrightarrow M \vDash \Phi(\overline{a})$.

Задача. Докажите, что объединение, пересечение и разность двух определимых отношений являются определимыми отношениями. Докажите, что проекция k-местного определимого отношения вдоль одной из ”осей координат” является $k - 1$-местным определимым отношением.

Мы уже познакомились с некоторыми положительными результатами в этой области: теорема Тарского – Зайденберга, определимость всех разрешимых отношений в $\langle N, \{+, \times\}\rangle$.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Задача. Рассмотрим структуру $\langle R, \{+, Sq\}\rangle$, где R – вещественные числа, интерпретация символа $+$ стандартна, а символу Sq соответствует такое двухместное отношение, что $Sq(x, y) \Leftrightarrow y = x^2$. Определимо ли в этой структуре трехместное отношение $z = xy$?

Задача. Рассмотрим структуру $\langle R^2, \{D\}\rangle$, где R^2 – плоскость, а двуместное отношение $D(x, y)$ означает, что расстояние между точками x и y равно 1. Определимы ли в этой структуре двуместные отношения "расстояние между точками x и y равно 2" и "расстояние между точками x и y не больше 2"?

Задача. Рассмотрим структуру $\langle Q, \{+\}\rangle$ – рациональные числа со сложением. Определимо ли в этой структуре отношение порядка на рациональных числах?
Решение.Рассмотрим отображение рациональных чисел $\varphi(x) = -x$. Это отображение является автомрофизмом структуры $\langle Q, \{+\}\rangle$, однако $x < y \not\equiv \varphi(x) < \varphi(y)$.

Метод, использованный при решении последней задачи, называется *методом автоморфизмов*. Вот его формальное описание. Пусть $M = \langle D, \Sigma, \textbf{Зн}\rangle$ – структура, а $\varphi\colon D \to D$ – взаимнооднозначное отображение множества D на себя (перестановка множества D). Пусть $R(x_0, \ldots, x_n)$ – некоторое отношение на множестве D. Мы скажем, что φ *сохраняет* отношение R, если $R(\bar{a}) \equiv R(\bar{\varphi}(\bar{a}))$ для любого набора $\bar{a} \in D$.

Ясно, что если нам удастся найти перестановку φ, которая сохраняет все отношения из Σ (точнее – сохраняет все отношения, которыми интерпретируются символы из Σ и $\varphi(c) = c$ для интерпретации любой константы из Σ) и не сохраняет отношение R, то R не определимо в M. Действительно, в этом случае φ является автоморфизмом струтуры M и, как мы знаем, $M \models \Phi(\bar{a}) \Leftrightarrow M \models \Phi(\bar{\varphi}(\bar{a})$ для любой формулы Φ в сигнатуре Σ и для любого набора $\bar{a} \in D$.

Нашим следующим примером будет структура $\mathbb{Q}_<$. Автоморфизмами этой структуры являются монотонно возрастающие отображения Q на Q и только они. Поскольку для любых $q_0, q_1 \in Q$ имеется автоморфизм, переводящий q_0 в q_1, то все одноместные отношения, определимые в $\mathbb{Q}_<$ тривиальны: они либо тождественно истины (совпадают с Q) или тождественно ложны (пусты). Поскольку для любых $q_0, q_1, q_2, q_3 \in Q$, таких, что $q_0 < q_1$ и $q_2 < q_3$ имеется автомрфизм, переводящий q_0 в q_2 и q_1 в q_3, то определимые двуместные отношения тоже устроены весьма просто. В случае трехместных отношений появляются нетривиальные — например отношение "между": $x < y < z \vee z < y < x$ и отношение "цикла": $x < y < z \vee y < z < x \vee z < x < y$. Эти отношения неопределимы друг через друга и, в частности, ни в одном из них не определим порядок. Когда мы говорим, что отношение R на множестве D не определимо через отношения $S_0, \ldots, S_k$ на том же множестве, мы подразумеваем следующее формальное утверждение: рассмотрим структуру $M = \langle D, \{s_0, \ldots, s_k\}, \textbf{Зн}\rangle$, сопоставление **Зн** определено так, что $\textbf{Зн}(s_i) = S_i$. Тогда отношение R не определимо в структуре M.

Чтобы доказать неопределимость, скажем, порядка через отношение "между" достаточно привести взаимно однозначное отображение Q на Q, сохраняющее отношение "между" и не являющееся монотонно возрастающим (пример такого отображения $\varphi(x) = -x$). Используйте этот метод автоморфизмов для доказательства неопределимости порядка через отношение ”цикла”. Вопрос о том, какие отношения определимы друг через друга (как устроено многообразие отношений структуры $\mathbb{Q}_<$) достаточно интересен, но его подробное обсуждение выходит за рамки данного курса.