Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 15
Теория множеств

Алексей Львович Семенов

Вполне упорядоченное множество

A – множество, $R \subset A \times A$, $R(x, y) \Leftrightarrow x < y$

(1) антисимметричен $\forall u(\neg u < u)$
(2) транзитивен $\forall u, v, w(u < v \wedge v < w \rightarrow v < w)$
(3) линеен $\forall u, v(u = v \vee u < v \vee v < u)$
(4) фундирован
$\forall u(u \subset A \wedge u \neq \varnothing \rightarrow \exists v(v \in u \wedge \forall w(w < v \rightarrow w \notin u)))$

A вполне упорядоченно, R – полный порядок

Примеры: конечное множество с любым линейным порядком, $n \in \omega$, ω

Вполне упорядоченное множество

Любое непустое подмножество вполне упорядоченного множества вполне упорядочено.

Для каждого элемента x, кроме наибольшего, существует единственный непосредственно следующий за ним ($x + 1$).
$\forall u(\exists v(u < v) \to \exists v(u < v \wedge \forall w(u < w \to w = v \vee v < w)))$

Предельный элемент x – не являющийся наименьшим и не имеющий непосредственно предшествующего ($x \neq y + 1$).

Вполне упорядоченное множество

Если A и B — вполне упорядоченные непересекающиеся множества, то множества $A+B$ и $A \times B$ вполне упорядочены.
$a \in A, b \in B \Rightarrow a < b$
$< a_0, b_0 >, < a_1, b_1 > \in A \times B$. $< a_0, b_0 > < < a_1, b_1 > \Leftrightarrow$
$b_0 < b_1 \vee (b_0 = b_1 \wedge a_0 < a_1)$

$\omega + n, \omega + \omega = \omega \times 2, n \times \omega, \omega \times n$

Задача. $n + \omega = \omega + n$? $n \times \omega = \omega \times n$?

Начальные отрезки

$B \subset A, B$ – *начальный отрезок*
$\Leftrightarrow \forall u \in A(\exists v \in B(u < v) \to u \in B)$

$[0, a]$ и $[0, a)$ – начальные отрезки (0 – наименьший элемент)

$[0, a] = [0, b] + n$, где b – предельный, $n \in \omega$.
Указание. $f(0, a) = a, f(k + 1, a) =$ предыдущий $f(k, a)$.

любой начальный отрезок кроме A имеет вид $[0, a)$

объединение множества начальных отрезков является начальным отрезком

Начальные отрезки

$B \subset A, B$ *кофинально* A – $\forall u \in A \exists v \in B (u \leqslant v)$

Теорема о возрастающем отображении.
Монотонная функция $f \colon A \to A$, то есть
$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
Тогда $a \leqslant f(a)$ и $f(A)$ кофинален A.

Д-во. $s = \{a | a > f(a)\}, a_0$ – наименьший.
$f(a_0) > f(f(a_0)) \Rightarrow f(a_0) \in s$.

Теорема о вложение полных порядков

A и B – вполне упорядочены. Тогда или A изоморфно начальному отрезку B, или B изоморфно начальному отрезку A, причем изоморфизм единственен.

Д-во. Начальный отрезок I множества A *корректен* – есть изоморфизм $f_I\colon I \to$ начальный отрезок B.
$f_I(0) = 0$, $a \in I \Rightarrow f_I([0, a))$ – начальный отрезок.
$f_I(a) =$наименьший элемент в $\{b \in B | b \notin f_I([0, a))\}$.
Трансфинитная индукция: единственность f_I.
$J \subset I \Rightarrow J$ корректен и $f_J \subset f_I$.
I_0 – объединение всех корректных отрезков, f – объединение всех f_I. Пусть $I_0 \neq A, f(I_0) \neq B$.
$I_0 = [0, a'), b'$ – наименьший в $B \setminus f(I_0)$.
$f' = f \cup < a', b' >$. Отрезок $[0, a']$ – корректен.
Противоречие.

Теорема о вложение полных порядков

Следствие Подмножество B вполне упорядоченного множества A изоморфно начальному отрезку A.
Указания. Начальный отрезок B не кофинален A. Теорема о возрастающем отображении.

$A < B \Leftrightarrow A$ изоморфно собственному начальному отрезку B
$A \not< A$
$A < B, B < A$ или A изоморфно B.

Теорема Цермело

A – множество, F – *функция выбора*.
$Func(F) \wedge Dom(F) = P(A) \setminus \{\varnothing\} \wedge Ra(F) \subset A \wedge \forall u (F(u) \in u))$

Если A можно вполне упорядочить, то функция выбора для A существует.

Теорема Цермело. Если для множества существует функция выбора, то множество можно вполне упорядочить.

План. $G(x) = F(A \setminus x); G\colon P(A) \setminus \{A\} \to A; G(x) \notin x.$
$a_0 = G(\varnothing)$, $a_1 = G(\{a_0\}), \ldots$
$b_0 = G(\{a_0, a_1, \ldots\}), b_1 = G(\{a_0, a_1, \ldots\} \cup \{b_0\}), \ldots$

Теорема Цермело

Док-во. $G(x) = F(A \setminus x); G\colon P(A) \setminus \{A\} \to A; G(x) \notin x.$
$< B, <_B>, B \subset A, <_B$ – полный порядок на B. Пара
$< B, <_B>$ *корректна* – $\forall u \in B(u = G(\{v \in B | v <_B u\}))$

Лемма. Для любых двух корректных пар одна является начальным отрезком другой.
Д. $< B, <_B>, < C, <_C>$. h – вложение $< B, <_B>$ в $< C, <_C>$.
$h(b) =$ наименьший в $C \setminus h([0, b)) = G(h([0, b)))$.
Покажем, что $h(x) = x$.
b_0 – наименьший в $\{b \in B | b \neq h(b)\}$. h тождественна на $\{b | b <_B b_0\}$.
$b_0 = G(\{b | b <_B b_0\}) = G(\{h(b) | b <_B b_0\}) = h(b_0)$

Теорема Цермело

Теорема Цермело. Если для множества существует функция выбора, то множество можно вполне упорядочить.

Продолжение д-ва. $S = \{< B, <_B> \mid < B, <_B> -$ корректная пара $\}$.
U – объединение всех B из S, R – объединение всех $<_B$ из S.
R – полный порядок на U.
($a \subset U \Rightarrow a \cap B \neq \varnothing, B$ – начальный отрезок U.)
Если $U \neq A$, положим $R' = R \cup \{< a, G(U) > | a \in U\}$.
Пара $< U \cup \{G(U)\}, R' >$ корректна. Противоречие.

Аксима выбора

Аксиома выбора.
Для любого множества существует функция выбора

$$\forall a \exists f (\\ Func(f) \wedge Dom(f) = P(a) \setminus \{\varnothing\} \wedge Ra(a) \subset a \wedge \forall u (f(u) \in u)) \\ )$$

$\mathbf{ZFC} = \mathbf{ZF} + \mathbf{AC}$

Является ли **ZFC** существенным расширением?
($\mathbf{ZF} \nvDash \mathbf{AC}$)?

Является ли **ZFC** безопасным расширением?
($\mathbf{ZF} \nvDash \neg\mathbf{AC}$)?

"Безопасное" – Гёдель. "Существенное" – Коэн.

Аксима выбора

Парадокс Банаха – Тарского

Т. Шар можно разбить на пять частей, передвинув которые можно сложить (без пустот и пересечений) два шара такого же радиуса.

Аксима выбора

Детерминированность игр

Игра Банаха – Мазура
Отрезок $[0;1]$. Два игрока: I и II.
A – множество выигрыша для I.
Поочередно в $[0;1]$ выбирают отрезки $S_{n+1} \subset S_n$.
Первый выигрывает, если в пересечении всех отрезков найдется точка из A. В противном случае выигрывает второй.
О. Стратегия. Выигрышная стратегия.

Аксиома детерминированности игр. Во всякой игре Банаха – Мазура один из игроков имеет выигрышную стратегию.

Из **AC** вытекает отрицание аксиомы детерминированности игр.

Аксима выбора

Задача. На мудрецов $w_0, w_1, w_2, \ldots$ надеты черные и белые колпаки, свой колпак мудрец, как обычно, не видит. Каждого спрашивают о цвете его колпака. Могут ли мудрецы согласовать свои действия так, чтоб ошиблось лишь конечное число мудрецов?

Верещагин Н. К., Шень А.
Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. – 4-е изд., доп. – М.: МЦНМО, 2012
ftp://ftp.mccme.ru/users/shen/logic/sets/part1.pdf