

**Введение в
математическую логику и
теорию алгоритмов**

Лекция 7

Алексей Львович Семенов

Логика высказываний

Синтаксис.

Логические константы (логические значения):

0 (Л, Ложь, F), 1 (И, Истина, T).

Упорядоченный (счетный) алфавит *имен высказываний*:

A_0, A_1, A_2, \dots

Логические связки:

\neg - отрицание, «не»

\wedge - конъюнкция, «и»

\vee - дизъюнкция, «или»

\rightarrow - импликация, «влечет», «если..., то...»

\equiv - эквивалентность, «равносильно»

Индуктивное построение формулы (исчисление):

Логические константы, логические имена – формулы.

- Если Φ, Ψ - формулы, $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$, то $(\neg \Phi), (\Phi \tau \Psi)$ – формулы.

Теорема об однозначности анализа формул логики высказываний. Для любой формулы Θ логики высказываний выполнено ровно одно:

- Θ – логическая константа,
- Θ – логическое имя,
- $\Theta = (\neg \Phi)$, где Φ однозначно определяется по формуле Θ ,
- $\Theta = (\Phi \tau \Psi)$, где τ, Φ, Ψ однозначно определяются по формуле Θ .

Д. Идея – анализ скобочной структуры, баланс скобок... Индукция

Логика высказываний

Семантика.

B^N - множество бесконечных последовательностей из 0 и 1.

Фиксируем интерпретацию $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots \in B^N$.

Значение формулы при данной интерпретации α .

Индукция по построению:

1. Значением логической константы является она сама.
2. Значением имени высказывания A_i является α_i .
3. Значением формулы $(\neg\Phi)$ является отрицание значения формулы Φ ,
т. е. **$Зн \Phi = 1 - Зн \Phi$** .
4. Значением формулы $(\Phi \tau \Psi)$, где $\tau \in \{\rightarrow, \wedge, \vee, \equiv\}$
является результат применения операции τ
к значениям формул Φ, Ψ .

Однозначность значения получается из однозначности анализа формулы.

Значение формулы – функция $B^N \rightarrow B$.

Пусть наибольший номер переменной в формуле равен $n-1$.

Тогда формула задает функцию $B^n \rightarrow B$.

Логика высказываний

Формула

- Общезначима (тавтология) – функция тождественно истинна (равна 1 на любом наборе аргументов)
- Выполнима – существует набор аргументов, на котором она истинна
- Противоречие – всюду ложна
- Эти свойства проверяются перебором

Подстановка

Пусть w , u – произвольные слова, x – буква.

Подстановка u вместо x в w – это результат одновременной замены всех вхождений x в w на u .

Обозначение: $w[u/x]$.

Свойство подстановки. Пусть A и B – две формулы, x – имя и фиксирована некоторая интерпретация.

Тогда, при этой интерпретации

- $\text{Зн } A[B/x] = \text{Зн } A[\text{Зн } B/x]$
- Значения индуктивно строящихся выражений
- Значение выражения определяется значением компонентов, из которых оно построено, а не их внутренней структурой.

Логика отношений

- Общезначимость и т. д.
- Процесс построения модели (то есть структуры, где формула истинна).
- Если он обрывается, то модели не существует.
- Как проверять общезначимость?
- Попытаться построить модель, где формула ложна (то есть ее отрицание истинно).
- Если формула общезначима, то мы это ВЫЯСНИМ.

Логика отношений

- Построение исчисления в привычном формате «рассуждений», где понятно, «что происходит».
- Индуктивное определение выводимой формулы
- Получается теорема о полноте
- Рассмотрим более простой пример
- Он интересен сам по себе как расширение математически описываемых человеческих рассуждений.

Модальная логика

Синтаксис

Новая связка:

\Box – необходимо.

В индуктивное построение формулы логики высказываний добавляется еще одна возможность:

- если Φ — формула, то $(\Box \Phi)$ — тоже формула (читается «необходимо Φ »).

Определение

- Имя высказывания – формула
- Если Φ, Ψ - формулы, $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$, то $(\neg\Phi)$, $(\Box \Phi)$, $(\Phi\tau\Psi)$ – формулы.

Здесь нет логических констант (для упрощения).

- Часто в формуле $(\Box \Phi)$ опускают внешние скобки.

Например, вместо

$$(\Box (A \rightarrow B)) \rightarrow ((\Box A) \rightarrow (\Box B)).$$

пишут

$$\Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B).$$

Модальная логика

Семантика

Содержательные интерпретации выражения $\Box A$:

- Необходимо A
- Всегда A
- Должно быть A
- Известно, что A
- Считается, что A
- Утверждение A доказуемо
- После завершения программы выполнено A

Другие модальности (не похожие на необходимость):

- Желательно, вероятно, запрещено, хорошо, удобно...

Вероятностные логики, нечеткие логики, квантовые логики... - неклассические

Модальная логика.

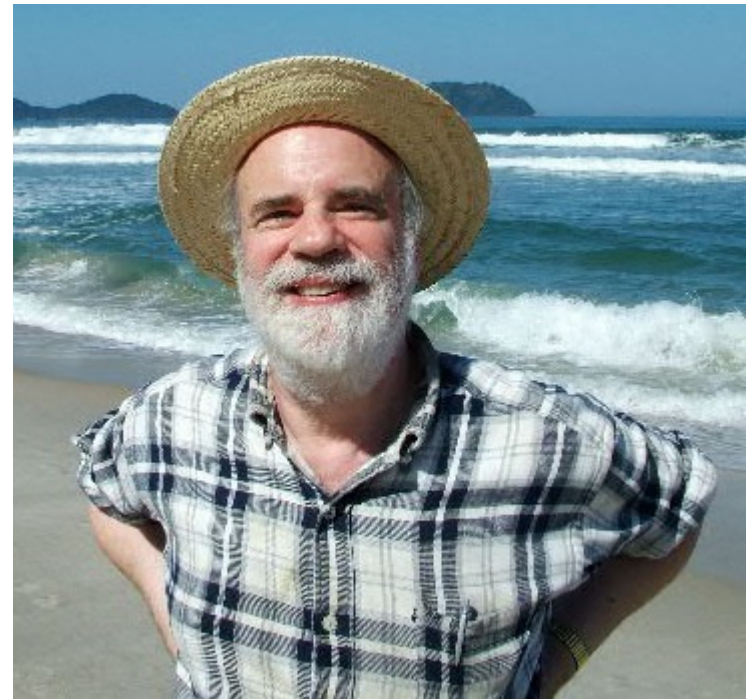
Семантика

Шкалой Крипке называется пара $F = \langle S, R \rangle$, где

- S — произвольное непустое множество *миров*,
- $R \subseteq S \times S$ — произвольное отношение *достижимости* (одного мира из другого) (ок. 1958, в возрасте 17 лет).

Шкалу можно представлять себе, как граф.

Сол Крипке (13.11. 1940 -)



Модальная логика

Семантика

Фиксируем шкалу F

- *Интерпретация V :*

каждое имя p отображает в множество миров $V(p) \subseteq S$.

- ***Значение формулы A в мире s шкалы F при интерпретации V – это элемент из B , определяемый индуктивно.***

- Для имен $\mathbf{3n}(p, s) = 1 \iff s \in V(p)$ (таким образом, $V(p)$ – это множество миров s , в которых p истинна).

- $\mathbf{3n}(\Box A, s) = \wedge \mathbf{3n}(A, t)$ по всем t , достижимым из s (бесконечная конъюнкция – не формула, но аналогична конечной).

- Остальное – как в логике высказываний. Связкам логики высказываний соответствуют операции на множествах миров.¹²

Модальная логика

Истинность

Отношение $F, s, V \models A$. Читается «**формула A истинна в мире s шкалы F при интерпретации V** ».

- Формула A **истинна в шкале F** , обозначение: $F \models A$, если она истинна в любом мире этой шкалы при любой интерпретации.
- Формула **истинна (общезначима)**, если она истинна в любой шкале. Обозначение $\models A$

Модальная логика

Свойства истинности

для любых F, A, B .

1. Подстановка формул вместо имён высказываний в тавтологию логики высказываний дает истинную формулу модальной логики.
2. $\models \Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.
3. Если $F \models A$, то $F \models \Box A$.
4. Если $F \models A$ и $F \models A \rightarrow B$, то $F \models B$.

Д. 1. – индукция по построению – определению значения.
Значение формулы определяется значениями использованных подформул (как в Свойстве подстановки).

4. Рассуждаем в данном мире при данной интерпретации.

3. A – во всех мирах, значит, во всех мирах, достижимых из данного.

Задача. Доказать 2 (прежде чем смотреть следующий слайд).

Доказательство п. 2.

- $F \models \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
- Возьмем интерпретацию и мир.
- Пусть посылка $\Box(A \rightarrow B)$ – истинна.
- $(A \rightarrow B)$ – истинна во всех достижимых
- Пусть $\Box A$ – истинна.
- A – истинна во всех достижимых
- B – истинна во всех достижимых
- $\Box B$ – истинна

Исчисление К (Крипке)

Бесконечное количество аксиом:

- Подстановки формул вместо имен в тавтологии логики высказываний – выводимы.
- Все формулы вида $\Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ – выводимы (аксиома нормальности).

Три правила вывода:

- Если A – выводима, то
 - $\Box A$ – выводима (необходимость),
 - подстановка в A формул вместо имен – выводима (подстановка).
- Если $A, A \rightarrow B$ – выводимы, то B – выводима (modus ponens – MP).

Истинность формул, выводимых в К

- Любая выводимая формула истинна в любой шкале.
- **Индукция по определению выводимости, используя доказанные свойства истинности**

Модальная логика

Для любых F, A, B :

1. Подстановка формул вместо имен в тавтологии дает общезначимые формулы (очевидно).

2. $F \models \Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.

3. Если $F \models A$, то $F \models \Box A$.

4. Если $F \models A$ и $F \models A \rightarrow B$, то $F \models B$.

Было проверено в свойствах истинности.

Отсюда по индукции получается истинность выводимых формул.

ИСТИННОСТЬ ВЫВОДИМОГО

тавтологии - очевидно

Выводимость

$$K \vdash \Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$$

Если $K \vdash A$, то

$$K \vdash \Box A.$$

Подстановка в A формул
вместо имен – выводима.

Если $K \vdash A$ и $K \vdash A \rightarrow B$, то

$$K \vdash B.$$

Истинность

$$F \models \Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$$

Если $F \models A$, то

$$F \models \Box A.$$

Подстановка в A формул
вместо имен – истинна.

Если $F \models A$ и $F \models A \rightarrow B$, то

$$F \models B.$$

**Несколько общих определений
и утверждений, полезных в
контексте шире модальной
ЛОГИКИ**

Противоречивые множества формул

- Формула называется синтаксическим противоречием, если выводимо ее отрицание.
- На этой лекции мы будем иногда опускать слово «синтаксическое». Раньше «противоречие» – отсутствие модели
- Множество формул называется (*синтаксически*) *противоречивым*, если конъюнкция каких-то формул из нее – противоречие, (*синтаксически*) *непротиворечивым* – в противном случае.

Лемма о противоречивой конъюнкции

В исчислении K если A – противоречие, то $A \wedge B$ – противоречие.

Д. $\neg p \rightarrow \neg(p \wedge q)$ – тавтология. Значит, если в K выводима посылка, по МР в K выводимо заключение.

Лемма о противоречии

Противоречивость $\{B_0, \dots, B_n, \neg A\}$ эквивалентна $K \vdash B_0 \rightarrow (B_1 \rightarrow (\dots (B_n \rightarrow A) \dots))$ и эквивалентна $K \vdash \bigwedge V_i \rightarrow A$.

Д. Противоречивость записывается как

$$K \vdash \neg(B_0 \wedge \dots \wedge B_n \wedge \neg A)$$

Пусть формулы A, B_i – имена.

Каждая из трех формул ложна, только если все B_i истинны, а A – ложно.

- Запишем импликацию между любыми двумя формулами. Это – тавтология, следовательно – выводима.
- Для любых A, B_i из выводимости одной из формул по МР следует выводимость другой.

Выводимость из множества формул

Формула A *выводима* из множества D , если $K \vdash \bigwedge B_i \rightarrow A$ для некоторого (конечного) множества формул B_i из D .

Множество D *замкнуто*, если оно содержит все выводимые из него формулы.

Полные множества формул

Непротиворечивое множество формул называется *полным*, если для каждой формулы оно содержит или эту формулу, или ее отрицание.

Лемма. Полное множество замкнуто.

Пусть D – полное, A – выводимо из D , т. е.

$$K \vdash \bigwedge B_i \rightarrow A.$$

По Л. о противоречии

$\{B_0, \dots, B_n, \neg A\}$ – противоречиво.

Если D не содержит A , значит D содержит $\neg A$ (полнота),

D содержит противоречивое множество.

Значит, D содержит A .

Лемма о полном расширении

Всякое непротиворечивое множество можно расширить до полного непротиворечивого.

Д. Перебираем все формулы, пытаюсь добавить или формулу, или ее отрицание.

- Предположим, что ни то, ни другое невозможно:

V – конъюнкция всех формул, которые входят в противоречия для A и $\neg A$. Тогда по лемме о противоречивой конъюнкции

$$K \vdash V \rightarrow A, V \rightarrow \neg A.$$

Лемма о полном расширении

- Подстановка в тавтологию

$$K \vdash (B \rightarrow A) \rightarrow ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B).$$

- Значит по МР
- $K \vdash ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B).$
- $K \vdash \neg B.$
- Таким образом, уже B было противоречием.

Объединение всех полученных множеств является расширением, полно и непротиворечиво – противоречие требует конечного числа элементов.

Общее замечание

Сформулированные последние определения и утверждения могут быть использованы в намного более широком классе случаев, чем модальная логика, и мы к ним будем прибегать и в дальнейшем.

Выводимость истинного

Мы будем интересоваться истинностью в специальной канонической шкале $M^K = (S^K; R^K)$.

- Элементы S^K – все полные (синтаксически) непротиворечивые множества формул.

Выводимость у нас «запрятана» внутри миров.

- $R^K(s; t) \Leftrightarrow \{A \mid \Box A \in s\} \subseteq t$.

- Интерпретация $V^K(p) = \{s \mid p \in s\}$. То есть, p

считается истинным в тех мирах

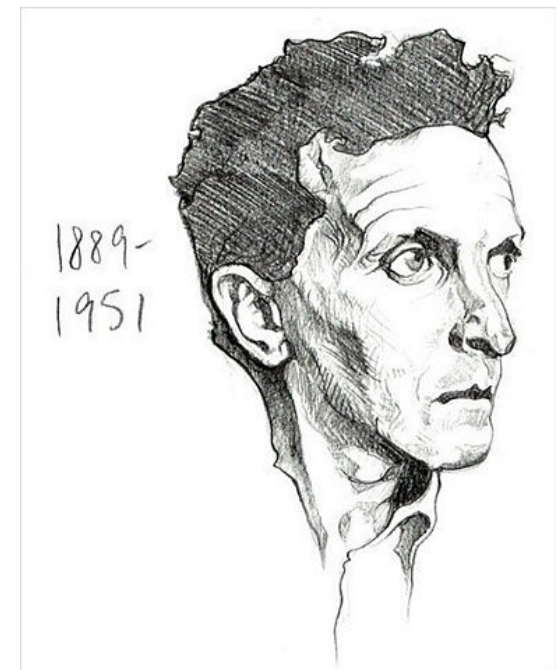
(множествах формул),

которым оно принадлежит.

Семантику мы определяем через отношение ε .

Мир – есть совокупность фактов о нем.

Людвиг Витгенштейн (26.04.1889 — 29.04.1951)



Утверждение 1.

Для любого мира $s \in S^K$ и формулы A

$\Box A \in s \iff (A \in t \text{ для всех } t, \text{ для которых } R^K(s; t)).$

То есть, действительно, принадлежность \in миру продолжает играть роль истинности в мире, в этом утверждении – для \Box .

Доказательство. (\Rightarrow)

Пусть $\Box A \in s$ и для t выполнено $R^K(s; t)$.

По определению

$R^K(s; t) \iff \{A \mid \Box A \in s\} \subseteq t.$

Значит, $A \in t$.

Утверждение 1.

Для любого мира $s \in S^K$ и формулы A

$$\Box A \in s \iff (A \in t \text{ для всех } t, \text{ для которых } R^K(s; t)).$$

Доказательство. (\Leftarrow)

Пусть $u = \{B \mid \Box B \in s\}$. Тогда $u \cup \{\neg A\}$ противоречиво.

- Иначе расширим $u \cup \{\neg A\}$ до t из S^K . $u \subseteq t$, t достижимо из s (опр. R^K). Значит, $A \in t$. Противоречие.

- По Л. о противоречии, в u есть B_0, \dots, B_n , для которых

$$K \vdash B_0 \rightarrow (B_1 \rightarrow (\dots (B_n \rightarrow A) \dots)).$$

$$K \vdash \Box (B_0 \rightarrow (B_1 \rightarrow (\dots (B_n \rightarrow A) \dots))) \text{ (необходимость).}$$

Используя аксиому $\Box(B \rightarrow A) \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box A)$ и (MP), получаем

$$K \vdash \Box B_0 \rightarrow \Box (B_1 \rightarrow (\dots (B_n \rightarrow A) \dots)).$$

- Поскольку $\Box B_0 \in s$ и s замкнуто относительно MP, то

$$\Box (B_1 \rightarrow (\dots (B_n \rightarrow A) \dots)) \in s.$$

Продолжая так же, получаем $\Box A \in s$.

Утверждение 2.

Для любого мира $s \in S^K$ и формулы A

$$M^K, s, V^K \models A \iff A \in s.$$

Здесь мы получаем совпадение \models и \in уже для всех формул.

Д. Индукция по построению формулы.

Для имен – определение V^K :

$$\text{Истинность } p \iff s \in V^K(p) = \{s \mid p \in s\} \iff p \in s.$$

Для связок логики высказываний получается с использованием полноты s и замкнутости s относительно MP:

- Истинность $\neg A$ эквивалентна не-истинности A (опр. 3н), эквивалентна не-принадлежности A к s (индукт. предп.), эквивалентна принадлежности $\neg A$ к s (полнота).
- Истинность импликации означает ложность посылки или истинность заключения...

Задача. Завершить доказательство.

Утверждение 3. $M^K \models A \iff K \vdash A$.

Д. Пусть A – истинна.

Если A не выводима, то множество $\{\neg A\}$ – не противоречиво. В противном случае $K \vdash \neg \neg A$.

Поскольку $K \vdash (\neg \neg A \rightarrow A)$, то $\{\neg A\}$ можно расширить до некоторого s , не содержащего A .

По Утверждению 2 A не истинно. Противоречие.

(\Leftarrow) – это Истинность выводимого.

Теорема полноты для K . Формула A выводима в Исчислении K тогда и только тогда, когда она истинна в любой шкале Крипке.

Задача. Доказать Теорему (куда девается M^K ?)

Задача. Сформулировать Теорему Полноты для Логики отношений.

Роберт Шекли. «Обмен разумов»

- На Земле он или на ее дубле?
- Нет ли здесь приметной детали, не соответствующей той Земле, где он родился? А может быть, таких деталей несколько? Марвин искал их во имя своего душевного покоя. Он обошел Стэнхоуп и его окрестности, осмотрел, исследовал и проверил флору и фауну.

Все оказалось на своих местах. Жизнь шла заведенным чередом; отец пас крысиные стада, мать, как всегда, безмятежно несла яйца.

Он отправился на север, в Бостон и Нью-Йорк, потом на юг, в необозримый край Филадельфия - Лос-Анджелес. Казалось, все в порядке. Он подумывал о том, чтобы пересечь страну с запада на восток под парусами по великой реке Делавер и продолжить свои изыскания в больших городах Калифорнии - Скенектеди, Милуоки и Шанхае.

Однако передумал, сообразив, что бессмысленно провести жизнь в попытках выяснить, есть ли у него жизнь, которую можно как-то провести.

Кроме того, можно было предположить, что даже если Земля изменилась, то изменились также его органы чувств и память, так что все равно ничего не выяснишь.

И потому охотно и благосклонно Марвин принял свой мир за чистую монету, женился на Марше Бэкер и жил с нею долго и счастливо.