Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 5
Логика отношений

Алексей Львович Семенов

Некоторые определения и обозначения

Замкнутая формула или *утверждение* – формула без свободных переменных.

Теория – множество утверждений.

Модель теории – структура, в которой выполнены все формулы теории.

$M = \langle D, \Sigma, \textbf{Зн} \rangle$ — структура, Φ — утверждение.
$M \models \Phi$ – формула Φ истинна в M.

Формула $\Phi(\bar{x})$ содержит свободные переменные,
$\bar{a} \in D$.
$M \models \Phi(\bar{a})$ – Φ истинна в M, если вместо переменных x_i подставлены элементы a_i.

Некоторые определения и обозначения

Противоречивая теория –
теория, у которой нет моделей.

Утверждение Φ *следует* из теории Γ ($\Gamma \models \Phi$) –
формула Φ истинна в любой модели теории Γ.

Является ли отношение следования разрешимым?
Здесь и далее красным цветом выделяются задачи.

Является ли отношение следования перечислимым?

Примеры теорий

$$(\exists u_0, \ldots, u_n \forall v (v = u_0 \vee \cdots \vee v = u_n))$$

Структуры, содержащие не более $n + 1$ элемента.

Бывают ли теории у которых нет бесконечных моделей, но для каждого натурального n есть модель, содержащая n элементов?

Примеры теорий

$$(\forall u(\neg R(u,u)))$$
$$(\forall u,v(R(u,v) \vee R(u,v) \vee u = v))$$
$$(\forall u,v,w((R(u,v) \wedge R(v,w)) \to R(u,w)))$$

Структуры, в которых отношение R задает линейный порядок.

Теория линейного порядка.

Примеры теорий

$(\forall u(\neg(u < u)))$
$(\forall u, v(u < v \vee v < u \vee u = v))$
$(\forall u, v, w((u < v \wedge v < w) \to u < w))$
$(\forall u(\exists v(u < v)))$

Примеры моделей: $\mathbb{Q}_<, \mathbb{R}_<, \mathbb{N}_<, \mathbb{Z}_<$.

Линейный порядок без последнего элемента. Все модели бесконечны.

Примеры теорий

$$(\forall u(\neg(u < u)))$$
$$(\forall u, v(u < v \vee v < u \vee u = v))$$
$$(\forall u, v, w((u < v \wedge v < w) \to u < w))$$
$$(\forall u(\exists v(u < v)))$$
$$(\forall u, v(u < v \to (\exists w(u < w < v))))$$
$$(\forall u(\exists v(v < u)))$$

Примеры моделей: $\mathbb{Q}_<$, положительные рациональные числа, $\mathbb{R}_<$.

Теория Γ_Q. Плотный линейный порядок без первого и последнего элемента.

Можно ли что-то добавить к Γ_Q, чтобы отделить $\mathbb{Q}_<, \mathbb{R}_<$?

Примеры теорий

$$(\forall u(\neg(u < u)))$$
$$(\forall u, v(u < v \vee v < u \vee u = v))$$
$$(\forall u, v, w((u < v \wedge v < w) \to u < w))$$
$$(\forall u(\exists v(u < v)))$$
$$(\forall u(0 < u \vee u = 0))$$
$$(\forall u(\exists v(u < v \wedge (\forall w(u < w \to (v = w \vee v < w))))))$$
$$(\forall u(u \neq 0 \to (\exists v(v < u \wedge (\forall w(w < u \to w = v \vee w < v))))))$$

Однозначно ли определен "непосредственно следующий" и "непосредственно предыдущий" элементы?

Примеры моделей: $\mathbb{N}_<$, нечетные числа, $\mathbb{N} + \mathbb{Z}$.
$\mathbb{N} + \mathbb{Z} = 1, 2, \ldots, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

Примеры теорий

$$(\forall u(\neg(u < u)))$$
$$(\forall u, v(u < v \vee v < u \vee u = v))$$
$$(\forall u, v, w((u < v \wedge v < w) \to u < w))$$
$$(\forall u(\exists v(u < v)))$$
$$(\forall u(0 < u \vee u = 0))$$
$$(\forall u(\exists v(u < v \wedge (\forall w(u < w \to (v = w \vee v < w))))))$$
$$(\forall u(u \neq 0 \to (\exists v(v < u \wedge (\forall w(w < u \to w = v \vee w < v))))))$$

Теория Γ_N: Дискретный линейный порядок с наименьшим элементом.

Можно ли что-то добавить к Γ_N, чтобы отделить $\mathbb{N}_<, \mathbb{N} + \mathbb{Z}$?

Инструменты

Изоморфные структуры.
Структуры $M_1 = \langle D_1, \Sigma, \mathbf{Зн}_1 \rangle$ и $M_2 = \langle D_2, \Sigma, \mathbf{Зн}_2 \rangle$
взаимнооднозначное отображение $\psi :\ D_1$ на D_2.
Для любых $\bar{a} \in D_1$, c – константа
$\mathbf{Зн}_1(P)(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathbf{Зн}_2(P)(\bar{\psi}(\bar{a})) \qquad \psi(\mathbf{Зн}_1(c)) = \mathbf{Зн}_2(c)$

Почему измoрфны множество положительных рациональных чисел и структура $\mathbb{Q}_<$?

Почему изоморфны две любые счетные модели Γ_Q?

Бывают ли модели теории Γ_Q, равномощные $\mathbb{R}$, но не изоморфные $\mathbb{R}_<$?

Инструменты

Th_M – множество утверждений, истинных в структуре M.

Структуры M_1 и M_2 *элементарно эквивалентны*, если $\mathrm{Th}_{M_1} = \mathrm{Th}_{M_2}$.

Почему изоморфные структуры эквивалентны?
Индукцией по построению формулы Φ
$M_1 \models \Phi(\bar{a}) \Leftrightarrow M_2 \models \Phi(\psi(\bar{a}))$

Бывают ли эквивалентные неизоморфные структуры?

Инструменты

$M = \langle D, \Sigma, \textbf{Зн} \rangle$, $D_1 \subset D$, D_1 – содержит константы Σ.
Подструктура $M_1 = \langle D_1, \Sigma, \textbf{Зн}_1 \rangle$ – отображение $\textbf{Зн}_1$ является ограничением **Зн** на D_1.

Элементарная подструктура.
$M \models \Phi(\bar{a}) \Leftrightarrow M_1 \models \Phi(\bar{a})$ для любых элементов $\bar{a} \in M_1$.
M – *элементарное расширение* M_1.
M эквивалентна M_1.

Бывают ли такие структуры M и M_1, что
(1) M_1 – подструктура M, и
(2) M_1 эквивалентна M, но
(3) M_1 не является элементарной подструктурой M?

Инструменты

Критерий Тарского – Воота.
Пусть M_1 – подструктура структуры M. Следующие два условия эквивалентны:
(1) M_1 – элементарная подструктура структуры M
(2) для любой формулы $\Phi(\bar{x}, y)$ и любых элементов $\bar{a} \in M_1$ если
$M \vDash \Phi(\bar{a}, b)$ для некоторого $b \in M$, то
$M \vDash \Phi(\bar{a}, b')$ для некоторого $b' \in M_1$.

$(1) \Rightarrow (2)$.
$\big(M \vDash \Phi(\bar{a}, b)$ для некоторого $b \in M\big) \Rightarrow \big(M \vDash (\exists u \Phi(\bar{a}, u))\big)$
$\Rightarrow \big(M_1 \vDash (\exists u \Phi(\bar{a}, u))\big) \Rightarrow \big(M_1 \vDash \Phi(\bar{a}, b')$ для некоторого $b' \in M_1\big) \Rightarrow \big(M \vDash \Phi(\bar{a}, b')\big)$.

Инструменты

Критерий Тарского – Воота. $(2) \Rightarrow (1)$.
$M_1 \vDash \Phi(\bar{a}) \Leftrightarrow M \vDash \Phi(\bar{a}), \bar{a} \in M_1$
$\Phi = (\exists u \Psi(\bar{x}, u))$

$\Rightarrow$. $M_1 \vDash (\exists u \Psi(\bar{a}, u))$
$M_1 \vDash \Psi(\bar{a}, b')$ для некоторого $b' \in M_1 \Rightarrow$
$M \vDash \Psi(\bar{a}, b') \Rightarrow M \vDash (\exists u \Psi(\bar{a}, u))$

$\Leftarrow$. $M \vDash (\exists u \Psi(\bar{a}, u))$.
$M \vDash \Psi(\bar{a}, b)$ для некоторого $b \in M \Rightarrow$
$M \vDash \Psi(\bar{a}, b')$ для некоторого $b' \in M_1 \Rightarrow$
$M_1 \vDash \Psi(\bar{a}, b') \Rightarrow M_1 \vDash (\exists u \Psi(\bar{a}, u))$

Инструменты

Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарной подмодели. *Любая беконечная структура с конечной или счетной сигнатурой содержит счетную элементарную подструктуру.*

Цепочка подструктур $M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M$.
M_0 содержит все константы.
$\Phi(\bar{x}, y), \bar{a} \in M_i$.
$M \vDash \Phi(\bar{a}, b), b \in M$ – помещаем в M_{i+1} некоторое b.
$M' = \bigcup M_i$. $M \vDash \Phi(\bar{a}, b), \bar{a} \in M'$.
$\bar{a} \in M_i \Rightarrow M \vDash \Phi(\bar{a}, b'), b' \in M_{i+1}$

Инструменты

Теорема компактности. *Если любое конечное подмножество теории непротиворечиво, то теория непротиворечива.*

Как доказать теорему компактности?

Следствие. *Если утверждение является следствием теории, то это утверждение является следствием некоторого конечного подмножества данной теории.*

Как вывести следствие из теоремы компактности?

Инструменты

Полная теория Γ – $\Gamma \models \Phi$ или $\Gamma \models \neg\Phi$ для любой замкнутой формулы Φ.

Почему любую непротиворечивую теорию можно расширить до полной теории?
Th_M

Теория полна тогда и только тогда, когда две любые модели теории эквивалентны.

Являются ли теории Γ_Q, Γ_N полными?

Плотный порядок без первого и последнего

Утверждение. *Теория* Γ_{Q} *полна.*

M_1 и M_2 – две не эквивалентные модели теории Γ_{Q}.
Они бесконечны.
По тереме Лёвенгейма – Сколема, можно считать, что M_1 и M_2 счетны.
Они изоморфны, значит эквивалентны. Противоречие.

Теория *категорична* в счётной мощности — все счётные модели изоморфны.

Плотный порядок без первого и последнего

Признак Лося – Воота. *Непротиворечивая теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей и категоричная в счётной мощности, полна.*

Категоричность в произвольной мощности.

Непротиворечивая теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей и категоричная в некоторой бесконечной мощности, полна.

Дискретный порядок с наименьшим

M – произвольная модель теории Γ_N, $a, b \in M$.
a, b *близки* – $\{c \in M | a \leqslant c \leqslant b$ или $b \leqslant c \leqslant a\}$ конечно.

Классы эквивалентности – *галактики*, галактика $\tilde{a}$.

Как устроена галактика $\tilde{0}$? Как устроены все прочие галактики?

Порядок на галактиках: $\tilde{a} < \tilde{b}$ – $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ и $a < b$.

Корректно ли определен порядок? Будет ли порядок на галактиках линейным? Есть ли среди галактик наименьшая?

Дискретный порядок с наименьшим

$\mathbb{N} = \langle N, \{0, 1, 2, \dots, <, +, \times\}, \textbf{Зн}_0 \rangle$.
$R_+(n_1, n_2, n_3) \Leftrightarrow n_1 + n_2 = n_3$
$R_\times(n_1, n_2, n_3) \Leftrightarrow n_1 \cdot n_2 = n_3$
$a + b + c = d \Rightarrow (\exists u(R_+(a, b, u) \wedge R_+(u, c, d)))$

Теория $\mathrm{Th}_\mathbb{N} \cup \{c \neq i \mid i \in N\}$ непротиворечива.
$\mathbb{N}^*$ – счетная модель данной теории.
$\mathbb{N}^*_<$ получена из $\mathbb{N}^*$ удалением всех отношений, кроме $<$ и константы 0.

$\mathbb{N}^*_<$ – модель теории Γ_N.

Может ли структура $\mathbb{N}^*_<$ оказаться изоморфной $\mathbb{N}_<$?