Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 4

Алексей Львович Семенов

Определимость отношений

- Множество D
- Семейство S отношений на D
- Какие отношения (элементы D^N) можно объяснить, выразить, определить через S?
- Объяснять можно на языке – языке логики отношений.
- Например, можно определить, объяснить отношение «между» на действительной прямой R через отношение «меньше».
- Через сложение и умножение можно определить отношения на N:
  - z является остатком от деления x на y
  - $y=2^x$
  - Произвольное вычислимое отношение

Поле действительных чисел. Определимые отношения

Структура:
$\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, p(\ ) =, > 0$ – для всех полиномов p с целыми коэфф., *Зн*$\rangle$

- Что определимо?
- Алгебраические отношения (множества в $\mathbb{R}^N$) – системы (конъюнкции) уравнений

Юрий Иванович Манин (16.02.1937 –):

- *Если уравнения выбраны и зафиксированы, мы представляем себе множество всех их решений… в виде геометрического образа, формы... В одних направлениях эта форма уходит в бесконечность, а в других прихотливо замыкается на себе. Разнообразие и сложность таких форм бесконечно богаче, чем все, что можно увидеть на современных выставках абстрактного искусства. Математики научились находить регулярности, взаимосвязи и закономерности в этом огромном мире.*

Поле действительных чисел. Многообразие всех отношений

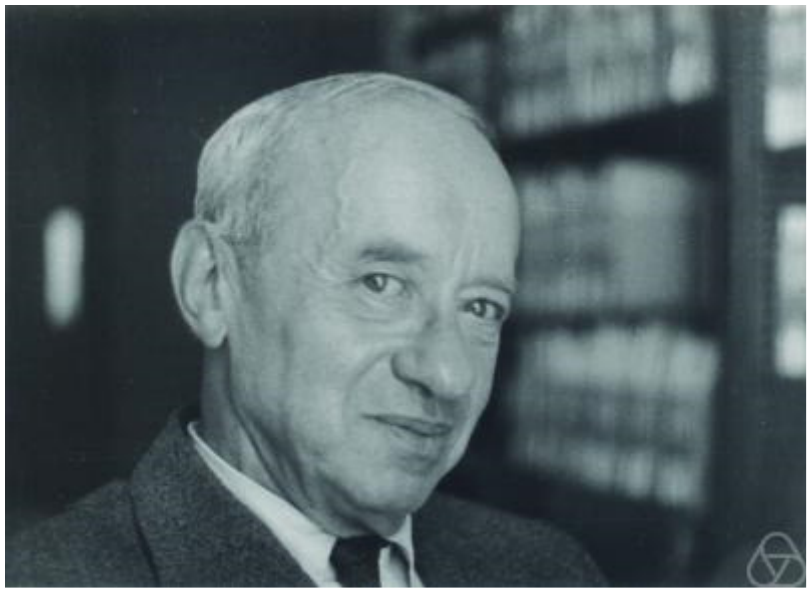
- Полуалгебраические множества – объединения, пересечения и дополнения множеств, задаваемых уравнениями и неравенствами
- Можно применять к полуалгебраическим множествам (отношениям) проекцию, соответствующую квантору существования для формул.
- Получится ли больше отношений?
- Нет – теорема Тарского – Зайденберга
- *эквивалентные* в данной структуре $<D,\ldots>$ формулы - задают одно и то же отношение (на D^{ω})

Теорема Тарского (– Зайденберга)

- Существует алгоритм, который для всякой формулы сигнатуры структуры $\mathfrak{R}$ строит эквивалентную ей в этой структуре бескванторную формулу.
- **Следствие.** Проекция полуалгебраического множества – полуалгебраическое множество.

Пример. Равенство $x^2+px+q = 0$ задаёт полуалгебраическое множество троек $\langle x, p, q\rangle$.

- Его проекция вдоль оси x на плоскость p, q – это полуалгебраическое множество $p^2 - 4q \geq 0$.



Альфред Тарский

(14.01.1901 — 26.10.1983)

Доказательство теоремы Тарского – Зайденберга

- Начнем с формул с единственным квантором существования $\exists u\, B(u, x_1, \ldots, x_n)$, где B - бесквантворная. Будем строить эквивалентную ей бесквантворную (задающую то же отношение на $\mathbb{R}^N$).
- Атомные формулы в B имеют вид $p(u, x_1, \ldots, x_n) = 0$ или $p(u, x_1, \ldots, x_n) > 0$, где p – многочлен с целыми коэффициентами.
- Многочлен p можно рассматривать как многочлен от переменной u, коэффициенты которого – многочлены от $x_1, \ldots, x_n$. Надо доказать, что те $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, при которых u существует – полуалгебраическое множество.

Доказательство. Метод интервалов

Пол Коэн (02.04.1934 — 23.03.2007)

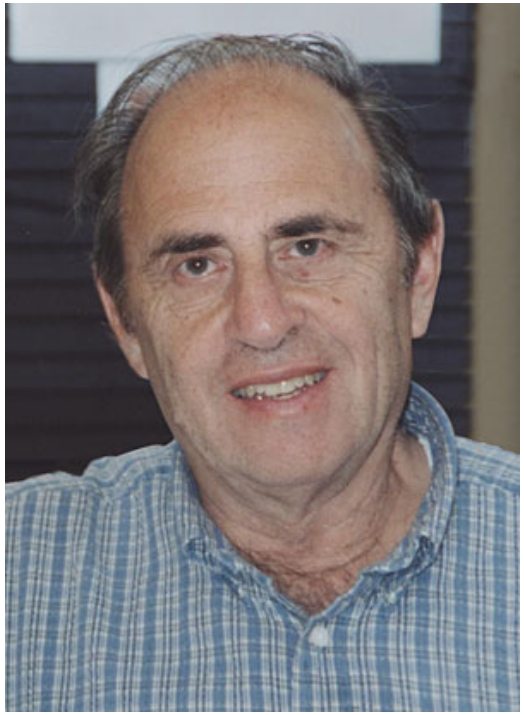
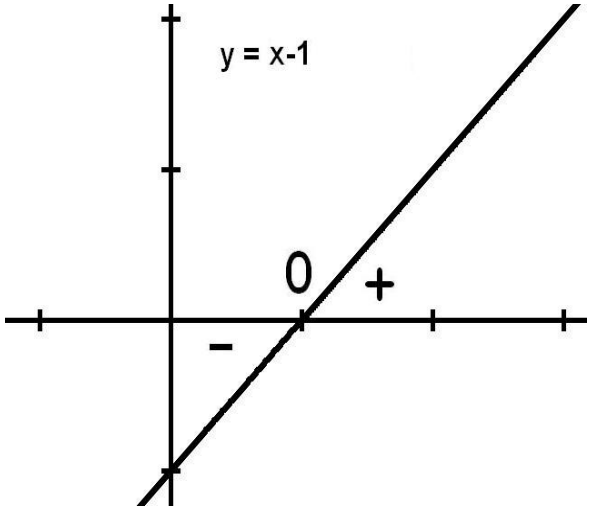


Диаграмма многочлена (неформ.)

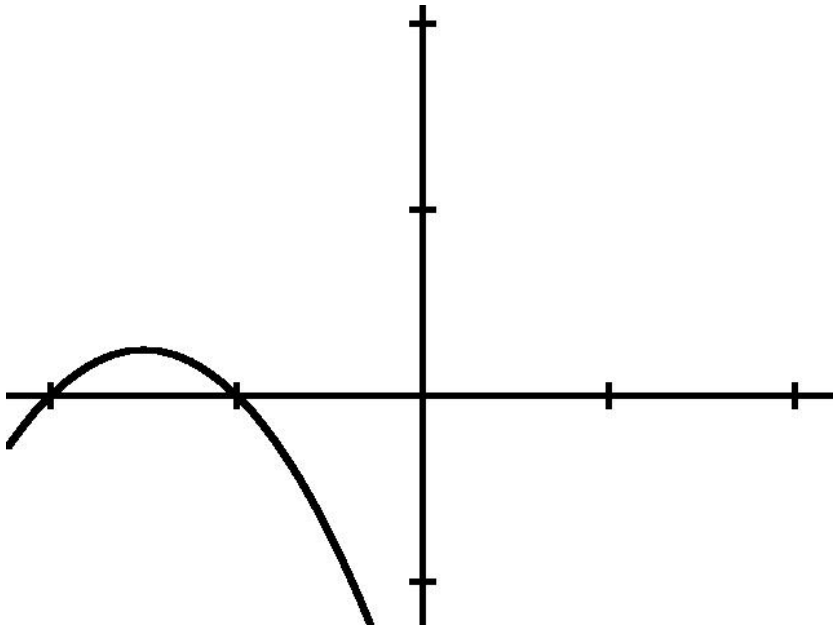
Знак многочлена в точке **– это 0, +, -.**

Диаграмма – цепочка знаков от минус до плюс бесконечности



-	0	+

это - диаграмма $ax+b$ ↔ $a>0$



-	0	+	0	-

это - диаграмма ax^2+bx+c ↔ $a<0 \wedge b^2 - 4ac > 0$

Пример подхода. Знак многочлена в корне другого многочлена

Пусть

- $p = sq + r$
- a – корень $q(x)$

Тогда

- Знак $p(a)$ = Знак $r(a)$
- Если r – остаток от деления p на q,

то r проще (имеет меньшую степень), чем q

Диаграмма семейства многочленов.

- Пусть задано семейство многочленов. Прямая $\mathbb{R}$ разбивается всеми корнями многочленов семейства на сегменты (включая одноточечные):
  $(-\infty, a_1), [a_1], (a_1, a_2), [a_2], \ldots, [a_n], (a_n, +\infty)$
- Построим таблицу: имена строк – многочлены, имена столбцов – сегменты. В клетке – знак многочлена на сегменте (он постоянен).
- **Пример.** Семейство: u^2-1 и $u(u-1)(u-2)$. Корни: -1, 0, 1, 2.

	$(-\infty, -1)$	**[-1]**	**(-1, 0)**	**[0]**	**(0, 1)**	**[1]**	**(1, 2)**	**[2]**	**$(2, +\infty)$**
u^2-1	+	0	–	–	–	0	+	+	+
$u(u-1)(u-2)$	–	–	–	0	+	0	–	0	+

Диаграмма семейства многочленов – таблица без сегментов

Доказательство теоремы Тарского – Зайденберга.

- Ширина диаграммы для данного семейства многочленов может меняться, но ограничена. в зависимости от X-ов ?
- Пусть все многочлены, входящие в бескванторную формулу $\Phi\ (u, x_1, \ldots, x_n)$, входят в семейство F. Тогда истинность формулы $\exists u\ \Phi\ (u, x_1, \ldots, x_n)$ при каждом наборе значений $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ определяется диаграммой семейства F на этом наборе.
- Число возможных диаграмм для данного F конечно, пространство $\mathbb{R}^n$ наборов $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ разбивается на конечное число частей, отвечающих всем возможным диаграммам.
- Нужно доказать, что эти части – полуалгебраические множества.

Доказательство теоремы Тарского – Зайденберга

Определим 4 операции на семействах многочленов.

1. Дана: пара p,q многочленов от u
(с коэффициентами из $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$).
Пусть k = (степень $p(u)$ – степень $q(u)$) + 1,
a – старший коэффициент $q(u)$.

Дает: *модифицированный остаток*
от деления $p(u)$ на $q(u)$ =
остаток от деления $a^k p(u)$ на $q(u)$.
Он лежит в $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$.

Степень модифицированного остатка меньше степени q.

Доказательство теоремы Тарского – Зайденберга

Определяем еще 3 операции на семействах многочленов.

2. Отбрасывание старшего члена

3. Взятие старшего коэффициента

4. Дифференцирование по u

В результате применения операции 1 к паре многочленов положительной степени получаем многочлен степени меньшей, чем максимум степеней в паре.

В результате применения операций 2 - 4 к многочленам положительной степени эти степени уменьшаются. Применение операции к многочлену нулевой степени дает его самого или 0.

Поэтому замыкание конечного семейства многочленов относительно этих операций конечно.

Доказательство теоремы Тарского – Зайденберга.

- **Лемма.** Пусть F – конечное множество многочленов из $(\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n])[U]$, замкнутое относительно перечисленных операций.
- Пусть F_0 – его часть, состоящая только из многочленов степени 0 по U (они представляют собой многочлены из $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$).
- Тогда диаграмма множества F при данных $X_1, \ldots, X_n$ полностью определяется диаграммой множества F_0 при тех же $X_1, \ldots, X_n$.

Доказательство теоремы Тарского – Зайденберга.
Доказательство Леммы

- Добавляем в множество F_0 многочлены из F в порядке неубывания их степеней (то есть можем добавить многочлен, если все многочлены меньшей степени уже добавлены), пока не получим всё множество F.
- Покажем, что на каждом шаге диаграмма расширенного множества (с новым многочленом) может быть однозначно восстановлена по диаграмме предыдущего множества.

Доказательство теоремы Тарского – Зайденберга

Добавляем многочлен *p*. Строим диаграмму

• Старший коэффициент *p* есть в диаграмме. (Ему соответствует строка постоянных знаков.)

• Старший коэффициент *a*:

=0 (нулевая строка в диаграмме), тогда многочлен, равный *p* (при данных $X_1, \ldots, X_{n)}$ уже есть в диаграмме

≠0, тогда:

• Ищем знак *p* в корне каждого многочлена q, представленного в диаграмме (Ст q≤ Ст p).

– В корне *q(u)* используем модифицированный остаток: $a^k p(u) = s(u)\, q(u) + r(u)$. Ст r < Ст q ≤ Ст p
Знак *a* и четность *k*, как и знак *r* – известны. Отсюда ясен знак *p*.

Доказательство теоремы Тарского – Зайденберга

Добавляем *p*.

• Ищем знаки и корни *p* в промежутках между корнями других многочленов. В промежутках:

- Если в соседних корнях *p(u)* имеет одинаковые знаки, то между этими корнями нет корней *p(u)* (иначе между корнями был бы корень производной, входящей в диаграмму) и знак в промежутке тот же.
- Если в одном из соседних корней *p(u)*=0, то на промежутке нет корней *p(u)* (аналогично).
- Если в соседних корнях у *p(u)* разные знаки, то на промежутке – ровно 1 корень *p(u)* (аналогично).

• Ищем корни на крайних (полубесконечных) сегментах. Знаки в бесконечностях известны (ст. коэф., четность степени). Корней не больше одного на сегмент, аналогично предыдущему.

Доказательство теоремы Тарского – Зайденберга

Добавляем *p*.

• Добавляем строку для *p.*

• Заменяем один столбец на три там, где есть корни *p(u).*

• Заполняем строчку для *p* в соответствии с предыдущим.

• Дублируем, в появившихся столбцах, клетки из других строчек.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы Тарского – Зайденберга

Мы можем заменить всякую формулу

$\exists u\, B(u, x_1, \ldots, x_n)$, где B – бесквантворная,
на эквивалентную, построенную в предыдущем доказательстве.

Именно: для каждой диаграммы D (расширенной) системы многочленов, для которой $\exists u\, B(u, x_1, \ldots, x_n)$ - истинна, берем ее часть D' – диаграмму без u, из которой она восстанавливается. Берем конъюнкцию атомных формул, описывающую диаграмму D'. Берем дизъюнкцию этих конъюнкций по всем диаграммам D, для которых $\exists u\, B(u, x_1, \ldots, x_n)$ истинна.

Мы можем заменить всякую формулу

$\forall u\, B(u, x_1, \ldots, x_n)$ на эквивалентную

$\neg\exists u \neg\, B(u, x_1, \ldots, x_n)$.

Пример. Формула $\exists x(x^2+px+q = 0)$

(1) x^2+px+q – соответствует атомной формуле,

(2) $px+q$ – (1) без старшего члена,

(3) $2x+p$ – производная от (1),

(4) 1 – старший коэффициент (1),

(5) q – (2) без старшего члена,

(6) p – ст. коэфф. (2) = произв.(2) = (3) без ст.чл.,

(7) 2 – старший коэфф. (3) = произв. от (3),

(8) q^2 – остаток деления $p^2 \cdot$(1) на (2),

(9) $4q - p^2$ – остаток деления $4 \cdot$(1) на (3),

(10) $2q - p^2$ – остаток деления $2 \cdot$(2) на (3),

(11) $p^2 - 2q$ – остаток деления $p \cdot$(3) на (2).

- Множество F_0 составляют 8 многочленов (4) – (11).

Пример. Формула $\exists x(x^2+px+q = 0)$

- Для сокращения перебора можно не рассматривать противоречивые диаграммы. Знаки многочленов, тождественно равных 1 и 2, – известны. Также, зная знак q, знаем и знак q^2. Зная знак $2q - p^2$, знаем знак $p^2 - 2q$. Для построения диаграмм D' оставляем только многочлены q, p, $4q - p^2$, $2q - p^2$. Количество диаграмм D' равно $3^4=81$.

q	+
p	–
$4q - p^2$	–
$2q - p^2$	–

- Для примера рассмотрим одну диаграмму D':
- Строим по ней диаграмму D, добавляя по очереди многочлены $2x+p$, $px+q$, x^2+px+q.
- Добавляем многочлен $2x+p$. Единственному столбцу диаграммы соответствует интервал $(-\infty, +\infty)$. При $-\infty$ многочлен отрицателен, при $+\infty$ – положителен. Значит, на интервале есть корень, и столбец разбивается на три столбца.

Пример. Формула $\exists x(x^2+px+q = 0)$

- Добавляем многочлен $px+q$.
- Каков его знак в нуле многочлена $2x+p$?
  Деление: $2(px+q) = p(2x+p) + 2q - p^2$.
  Знак $px+q$ равен знаку остатка $2q - p^2$ (–).
- Так как $p < 0$, то при $-\infty$ многочлен $px+q$ положителен, а при $+\infty$ – отрицателен.
  Корень имеется в первом столбце.

q	+	+	+
$\boldsymbol{p}$	–	–	–
$4q - p^2$	–	–	–
$2q - p^2$	–	–	–
$2x+p$	–	0	+

- Добавляем многочлен x^2+px+q.
- Его знак в нуле многочлена $2x+p$?
  $4(x^2+px+q) = (2x+p)(2x+p) + 4q - p^2$.
  Знак равен знаку остатка $4q - p^2$ (–).
- Его знак в нуле многочлена $px+q$?
  $p^2(x^2+px+q) = (px+p^2-q)(px+q) + q^2$.
  Так как $p^2 > 0$, знак равен знаку остатка q^2 (+).

q	+	+	+	+	+
p	–	–	–	–	–
$4q - p^2$	–	–	–	–	–
$2q - p^2$	–	–	–	–	–
$2x+p$	–	–	–	0	+
$px+q$	+	0	–	–	–

Пример. Формула $\exists x(x^2+px+q = 0)$

- Во 2 и 4 столбцах знаки разные. Значит, в 3 столбце – корень. 3-й столбец делим на три столбца.
- При $-\infty$ и при $+\infty$ многочлен x^2+px+q положителен. Корень – в последнем столбце, последний столбец делим на три столбца.
- Расставляем знаки.
- Диаграмма D по диаграмме D' построена.
- Видим, что при условиях $q>0$, $p<0$, $4q-p^2<0$, $2q-p^2<0$ многочлен x^2+px+q имеет два корня.
- Для полной картины нужно рассмотреть оставшиеся 80 вариантов диаграммы D'.

q	+	+	+	+	+
p	–	–	–	–	–
$4q - p^2$	–	–	–	–	–
$2q - p^2$	–	–	–	–	–
$2x+p$	–	–	–	0	+
$px+q$	+	0	–	–	–
x^2+px+q		+		–	

q	+	+	+	+	+	+	+	+	+
p	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$4q - p^2$	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$2q - p^2$	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$2x+p$	–	–	–	–	–	0	+	+	+
$px+q$	+	0	–	–	–	–	–	–	–
x^2+px+q	+	+	+	0	–	–	–	0	+

Поле действительных чисел

- Что дает алгоритм для формул без свободных переменных?
- Он отвечает на вопрос об истинности формул.
- Следствие Теоремы Тарского – Зайденберга.
- Теория $\mathcal{R}$ разрешима

  (Множество формул, истинных в модели $\langle \mathbb{R}, \langle \{0, 1\}, \{+, *\}, \{ =, >\}\rangle, \mathit{Зн}\rangle$ – разрешимо.)

Геометрия

- С помощью метода координат большинство геометрических утверждений можно записать как утверждения о действительных числах.
- Исключение. Не нужно говорить об n-угольниках без указания конкретного n.
- Пример. Гипотеза 13 шаров: спор между Ньютоном и Грегори: "Сколько материальных шаров равных радиусов можно "прислонить" к фиксированному шару того же радиуса?"
- Существование решения у системы уравнений с 39 неизвестными.
- Невозможность (правота Ньютона) доказана Л. Ван дер Варденом и К. Шютте в 1953 году (без теоремы Тарского).
- http://www.etudes.ru/ru/mov/mov004/