Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 2

Алексей Львович Семенов

План

- Аксиомы теории множеств (повт.)
- Трудности с полнотой
- Логика высказываний. Синтаксис и семантика

Аксиомы теории множеств (повт.)

Существование множеств

- $\exists \boldsymbol{x}\ \forall \boldsymbol{y}\ \neg\ (\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{x})$

  [Аксиома пустого множества]
- $\forall \boldsymbol{u} \forall \boldsymbol{v}\ \exists \boldsymbol{s} \forall \boldsymbol{w}\ (\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{s} \equiv (\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \vee \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}))$

  [Аксиома пары]
- Пример: $\{\emptyset\}$ – непустое множество.
- Существование объединения множества:

  $\bigcup\{\{1,2,4\},\{4,5\},\{8,7,\{9\}\}\} = \{1,2,4,5,8,7,\{9\}\}$.

Построение натуральных чисел (повт.)

Один из способов

- Построение каждого отдельного числа:
  - 0 – это $\emptyset$
  - 1 – это $\{0\}$
  - 2 – это $\{0,1\} = \{0,\{0\}\}$

  ……Операция $S(x) = x \cup \{x\}$
- Существование множества всех натуральных чисел – аксиома.
- Задача. Написать аксиому существования натуральных чисел.

Какие еще аксиомы нужны? (повт.)

- Существование множества всех подмножеств данного множества:

  $\forall u \exists s \forall v (\forall w (w \in v \to w \in u) \equiv v \in s)$ [Аксиома степени]

  Множество всех подмножеств множества ***u*** можно отождествлять с $\mathbf{B}^{\boldsymbol{u}}$.

- Что нужно для существования множества действительных чисел?
- Что нужно для доказательства свойств («аксиом») действительных чисел?

Пределы расширения

- Существует множество всех объектов с данным свойством – Аксиома?
- Для каждого свойства Ф(x) добавить аксиому:

  $\exists \boldsymbol{s} \forall \boldsymbol{v} (\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{s} \equiv \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}))$
- Можно рассмотреть только свойства, определяемые формулами.
- Формула Ф(x):

  $\neg (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x})$ [Диагональ Рассела]
- Задача. Может ли существовать требуемое $\boldsymbol{s}$?
- Можно добавить:

  $\forall u \exists \boldsymbol{s} \forall \boldsymbol{v} (\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{s} \equiv (v \in u \wedge \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v})))$

  [Аксиомы выделения, для каждой Ф]

Теорема Кантора

- **Неравномощность множества и множества всех его подмножеств**
- **Д.**
- Пусть f – функция, отображающая множество A на множество всех его подмножеств. Будем писать $f(x) = y$ вместо $< x; y > \in f$.
- Формула $\Phi(x)$:

  $\exists y\, (f(x) = y \wedge \neg\, (x \in y))$.
- Аксиома выделения дает $B \subset A$:

  $\forall x\, (x \in B \equiv (x \in A \wedge \exists y\, (f(x) = y \wedge \neg\, (x \in y))))$.
- По предположению $f(b) = B$ для некоторого $b \in A$.
- $b \in B \equiv (b \in A \wedge \exists y\, (f(b) = y \wedge \neg\, (b \in y)))$.
- Для этих b, B левая часть эквивалентности истинна, а правая – нет (y должно совпадать с B…).
- Противоречие.

Границы математики

- Диагональ Рассела – противоречие.
- Диагональ Кантора – теорема.
- Множество действительных чисел не равномощно множеству натуральных.
- Существует ли бесконечное множество действительных чисел, не равномощное ни всему множеству действительных чисел, ни множеству натуральных чисел?
- Кантор считал, что нет (Гипотеза Континуума) – содержание Первой Проблемы Гильберта.
- Гедель доказал в 1940 году, что Гипотезу Континуума нельзя опровергнуть: она не приводит к противоречию (если теория множеств без нее – не противоречива).
- Пол Коэн (02.04.1934 – 23.03.2007) доказал в 1964 году, что Гипотезу Континуума нельзя доказать, если принять естественную систему аксиом о множествах.

Геометрия. Пятый постулат

- Через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, не пересекающейся с данной.
- «И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, [в сумме]меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.»
- Попытки доказательства: привести к противоречию отрицание.
- Николай Иванович Лобачевский

(20.11.1792 — 12.02.1856) пришел к убеждению:
если к геометрии Евклида
добавить утверждение о существовании
нескольких прямых, проведенных
через одну точку и параллельных данной,
то противоречия не возникнет, 1829 г.
«О началах геометрии» –
«неэвклидова геометрия».

Геометрия. Пятый постулат

- Янош Бóйяи (15.12.1802 — 27.01.1860) Результат был опубликован в книге его отца в 1832 году.
- Отец Бóйяи привлек внимание Карла Фридриха Гаусса (30.4.1777 — 23.02.1855) к этой публикации. Гаусс – давно знал!
- Доказательство утверждения Лобачевского получено Феликсом Клейном (25.4.1849 - 22.6.1925) в 1871 году.
- Принципиально выдвижение и отстаивание гипотезы известным ученым – Лобачевским.

Математика. Программа Гильберта

- Гипотеза Континуума – не поправимый случай, а неизбежная ситуация
- Гедель: полная и не противоречивая математика невозможна.

Задачи нашего курса

- Построить систему доказательств
- Построить систему аксиом теории множеств
- Изучить полноту и непротиворечивость для построенной системы или ее частей
- Будут рассмотрены произвольные системы доказательства, и еще более общие математические объекты – исчисления
- Вычислимость…
- В наших рассмотрениях мы (как и других разделах математики) используем неформальную теорию множеств

Логика высказываний

Первый из логических языков нашего курса.

- Последовательность имен высказываний

  $A_0, A_1, A_2, \ldots$.

- Определение формулы (логики высказываний).

1. Логические константы 0 и 1 – формулы.
2. Если A – имя высказывания, то A – формула.
3. Если Φ, Ψ – формулы, τ – связка: $\wedge$ (конъюнкция),

   $\vee$ (дизъюнкция), $\rightarrow$ (импликация), $\equiv$ (эквивалентность),
   то $\neg\Phi$, $(\Phi\ \tau\ \Psi)$ – формулы.

- **Индуктивное определение (построение)**
- **«Порочный круг» (цикл в определении –** *circulus in definiendo*) **–**

  определение понятия через его же само?

Круг в определении

- «СЕПУЛЬКИ — важный элемент цивилизации ардритов (*см.*) с планеты Энтеропия (*см.*). См. СЕПУЛЬКАРИИ». «СЕПУЛЬКАРИИ — устройства для сепуления (*см.*)». «СЕПУЛЕНИЕ — занятие ардритов (*см.*) с планеты Энтеропия (*см.*). См. СЕПУЛЬКИ».

- ***Лем С. «Звёздные дневники Ийона Тихого. Путешествие четырнадцатое.»***

Синтаксис логики высказываний.

- **Примеры формул:**
- A_2, $(A_1 \lor A_0)$, $\neg A_1$
- $((A_1 \lor A_0) \equiv \neg A_1)$,
- **Как формула строилась:**
- A_1
- A_0
- $(A_1 \lor A_0)$
- A_1
- $\neg A_1$
- $((A_1 \lor A_0) \equiv \neg A_1)$
- **Задача**. Как проверить, является ли слово формулой?
- Например, формулы ли: $)))A_0$, $((A_1 \land A_2))$?

Логика высказываний

- Семантика.
- ***B*** = {0,1}.
- Семантика связок (таблица была):

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \equiv B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Логика высказываний. Семантика

- $\boldsymbol{B}^{\mathrm{N}}$ **-** множество бесконечных последовательностей из 0 и 1.
- Пояснение:

  Выбор элемента $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i \ldots \in \boldsymbol{B}^{\mathrm{N}}$ означает фиксацию значений имен высказываний A_0, A_1,…, A_i,… .
- Всякий элемент $\alpha \in \boldsymbol{B}^{\mathrm{N}}$ – *интерпретация*.
- Фиксируем интерпретацию α.
- Замечание. Нам удобно задавать значения сразу для всех имен высказываний.

Логика высказываний. Семантика

Значение формулы при данной интерпретации $\alpha \in \mathbf{B}^{\mathbf{N}}$.

Вычисление индукцией по построению:

1. Значением логической константы является она сама.
2. Значением имени высказывания A_i является α_i .
3. Значением:

   - формулы $(\neg\Phi)$ является отрицание значения Φ, т.е.

     Зн $(\neg\Phi)$ **= 1- Зн** Φ.

   - формулы $(\Phi\tau\Psi)$**, где** $\tau\in\{\rightarrow,\wedge,\vee,\equiv\}$ является результат применения τ к значениям формул Φ, Ψ.

Значение формулы – функция $B^N \rightarrow B$.

Наибольший номер имени высказвания в формуле равен ***n - 1.***

формула задает функцию $B^n \rightarrow B$.

Логика высказываний. Семантика

- Нахождение значения
- Задача. Почему процесс заканчивается?
- Задача. Почему результат процесса однозначно определен? (однозначность анализа)
- Может ли быть, например:

$\Phi = (\Phi_1 \wedge \Psi_1) = (\Phi_2 \rightarrow \Psi_2)$?

Булевы функции

- Функции $\boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}$.
- Формула задает функцию $\boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}$.
- **Задача.** Сколько существует функций: $\boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}$?
- **Задача**. Всякую ли функцию можно задать подходящей формулой?

Лишние скобки

- Задача. Придумать разумные правила опускания и восстановления скобок.

Семантика

Терминология и обозначения для формул

- Обозначение: $\alpha \models \Phi$ – значение Φ при интерпретации α равно 1.

  Φ выполнена в (при) интерпретации α.
- Обозначение: $\models \Phi$ – значение Φ при любой интерпретации равно 1 (Φ всегда истинно). Такие Φ называются тавтологиями.
- Φ ложные (получающие значение 0) при любой интерпретации называются противоречиями.
- Φ, для которой существует интерпретация, в которой она истинна, называется выполнимой.

Семантика

Терминология и обозначения для множеств формул

• Множество формул <u>совместно</u>, если существует интерпретация, при которой все его формулы истинны.

• Множество формул <u>противоречиво</u>, если не существует интерпретации, при которой все его формулы истинны.

Пусть Δ – множество формул.

• Обозначение: $\Delta \models \Phi$ **–** при всякой интерпретации значение Φ равно 1, если значение всех формул из Δ в той же интерпретации – это 1. Φ <u>следует из</u> Δ.

Примеры и применения.
Распространенные способы рассуждения

- **Пусть** $\alpha \models (\Phi \to \Psi)$ и $\alpha \models \Phi$. Тогда $\alpha \models \Psi$.
- Всюду вычеркнем α (то есть – «при всех α») и запишем:

$$\frac{\models \Phi, \quad \models (\Phi \to \Psi)}{\models \Psi}$$

– **Modus ponens** («правило вывода»)

- **То есть, если в каком-то рассуждении мы получили Φ и $\Phi \to \Psi$, то можем получить Ψ.**

Распространенные способы рассуждения

- $$\frac{\neg\Phi \models 0}{\models \Phi}$$ – **доказательство от противного**

- $\neg\,\Phi \to \neg\Psi \models \Psi \to \Phi$ – **контрапозиция**

- **(**$\Psi \to \Phi$**), (**$\neg\Psi \to \Phi$**)** $\models \Phi$ – **разбор случаев**

- **(**$\Phi \to \Psi$**), (**$\Psi \to \Phi$**)** $\models$ **(**$\Phi \equiv \Psi$**)** – **доказательство эквивалентности**

Теорема компактности

- О. Компактное пространство: Из любого покрытия открытыми можно выбрать конечное подпокрытие.
- Т. Топология: Компактное пространство. Семейство замкнутых множеств. Если всякое конечное подсемейство имеет непустое пересечение, то и пересечение всех множеств семейства не пусто.
- Т. Логика. Семейство формул. Если всякое конечное подсемейство выполнимо, то и все семейство выполнимо.
- **Задача**. Доказать Теоремы компактности в топологии (для множеств на прямой, например) и логике.

Логика высказываний

- Построение **сложных** высказываний из **простых**
- Для **простых** – существенна только их **истинность**.
- О чем высказывания – не существенно и **не видно**.
- Значение сложного высказывания определяется значением его частей. В конце концов – «атомных» высказываний.