Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 5

Логика отношений

До сих пор мы рассматривали некоторую структуру и анализировали формулы в этой структуре. Так, мы рассматривали натуральный ряд с обычной сигнатурой и исследовали, какие отношения можно задать формулами. Или мы рассматривали действительные числа с сигнатурой, состоящей из символов полиномов и доказывали, что любая формула эквивалентна безквнторной.

Теперь мы рассмотрим обратную задачу: дано множество формул в некоторой сигнатуре, что можно сказать о структурах, в которых выполнены все формулы из этого множества.

1. Некоторые определения и обозначения

Формула без свободных переменных называется *замкнутой* или *утверждением*.

Множество замкнутых формул (в какой-то сигнатуре) мы называем *теорией* или *системой аксиом*. Структуру, в которой выполнены все формулы данной теории называют *моделью* теории.

Если $M = \langle D, \Sigma, \textbf{Зн} \rangle$ — структура с сигнатурой Σ, а Φ — утверждение в той же сигнатуре, то $M \models \Phi$ означает, что формула Φ истинна в M.
Индуктивное определение истинности формулы в структуре было дано на лекции 3, это одно из главных определений логики отношений, Вам следует полностью понимать его.

Если формула $\Phi(\bar{x})$ содержит свободные переменные, а $\bar{a} \in D$, то $M \models \Phi(\bar{a})$ означает, что Φ истинна в M, если вместо переменных x_i подставлены элементы a_i. (Более формально: значение формулы Φ на любой бесконечной последовательности из D^N, начинающейся с $a_0, \ldots, a_k$, равно 1 (истине), см. Лекцию 3.)

Теории, у которых нет моделей, называются *противоречивыми*.

Мы скажем, что утверждение Φ *следует* из теории Γ, если формула Φ истинна в любой модели теории Γ. Несмотря на некоторую двусмысленность, мы будем обозначать следование аналогичным выражением: $\Gamma \models \Phi$.

Понятие следования является одним из центральных в логике отношений (иногда эту логику называют *логикой первого порядка*).

Задача. Является ли отношение следования разрешимым?
Комментарий. Вопрос состоит в следующем: можно ли придумать такой алгоритм (компьютерную программу) с двумя аргументами – символьными строками, что если в качестве значения первого аргумента дать одну формулу, а в качестве второго – другую, то алгоритм сообщит "да", если вторая формула следует из первой, и "нет" – в противном случае.

Исходное определение следования ”запрограммировать” конечно нельзя: нужно просмотреть все мыслимые структуры с данной сигнатурой и проверить, что если на структуре истинна первая формула, то истинна и вторая. Однако из этого не следует, что искомого алгоритма не существует.

Задача. Является ли отношение следования перечислимым?
Комментарий. Вопрос состоит в следующем: можно ли придумать такой алгоритм (компьютерную программу) с одним аргументом – символьной строкой, что если в качестве значения аргумента дать формулу, то алгоритм напечатает (бесконечный) список всех формул, следующих из данной и только их.

2. Примеры теорий

1.
$(\exists u_0, \ldots, u_n \forall v(v = u_0 \vee \cdots \vee v = u_n))$

Моделями являются структуры, содержащие не более $n+1$ элемента.

Задача. Бывают ли теории у которых нет бесконечных моделей, но для каждого натурального n есть модель, содержащая n элементов?

2.
$(\forall u(\neg R(u,u)))$
$(\forall u, v(R(u,v) \vee R(u,v) \vee u = v))$
$(\forall u, v, w((R(u,v) \wedge R(v,w)) \to R(u,w)))$

Это структуры, в которых отношение R задает линейный порядок.

3.
$(\forall u(\neg(u < u)))$
$(\forall u, v(u < v \vee v < u \vee u = v))$
$(\forall u, v, w((u < v \wedge v < w) \to u < w))$
$(\forall u(\exists v(u < v)))$

Линейный порядок без последнего элемента. Примеры моделей: $\mathbb{Q}_<, \mathbb{R}_<, \mathbb{N}_<, \mathbb{Z}_<$.

Задача. Доказать, что все модели этой теории бесконечны.

4.
$(\forall u(\neg(u < u)))$
$(\forall u, v(u < v \vee v < u \vee u = v))$
$(\forall u, v, w((u < v \wedge v < w) \to u < w))$
$(\forall u(\exists v(u < v)))$
$(\forall u, v(u < v \to (\exists w(u < w < v))))$
$(\forall u(\exists v(v < u)))$

Теория Γ_Q. Плотный линейный порядок без первого и последнего элемента.

Примеры моделей: $\mathbb{Q}_<$, положительные рациональные числа, $\mathbb{R}_<$.

Задача. Можно ли что-то добавить к Γ_Q, чтобы отделить $\mathbb{Q}_<, \mathbb{R}_<$?

5.
$(\forall u(\neg(u < u)))$
$(\forall u, v(u < v \lor v < u \lor u = v))$
$(\forall u, v, w((u < v \land v < w) \to u < w))$
$(\forall u(\exists v(u < v)))$
$(\forall u(0 < u \lor u = 0))$
$(\forall u(\exists v(u < v \land (\forall w(u < w \to (v = w \lor v < w))))))$ (непосредственно следующий)
$(\forall u(u \neq 0 \to (\exists v(v < u \land (\forall w(w < u \to w = v \lor w < v))))))$ (непосредственно предыдущий)

Задача. Однозначно ли определен "непосредственно следующий" и "непосредственно предыдущий" элементы?

Примеры моделей: $\mathbb{N}_<$, нечетные числа, $\mathbb{N}_< + \mathbb{Z}_<$.
$\mathbb{N}_< + \mathbb{Z}_< = 0, 1, 2, \dots, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Теория Γ_N: Дискретный линейный порядок с наименьшим элементом.

Задача. Можно ли что-то добавить к Γ_N, чтобы отделить $\mathbb{N}_<, \mathbb{N}_< + \mathbb{Z}_<$?
Комментарий. На лекции одна из слушательниц предложила отделить эти две структуры добавив бесконечное число утверждений – воспользоваться (если я ее правильно понял) тем, что на $\mathbb{N}_<$ выполнен принцип индукции: в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент. То есть для каждой формулы $\Phi(x)$ в сигнатуре теории Γ_N добавить утверждение

$$(\exists u(\Phi(u))) \to (\exists v(\Phi(v) \land (\forall w(w < v \to \neg\Phi(w)))))$$

Это прекрасная попытка, и, конечно, все эти утверждения истинны в $\mathbb{N}_<$. Но откуда у нас уверенность, что хоть одно из этих утверждений ложно в $\mathbb{N}_< + \mathbb{Z}_<$? Так что вопрос остается открытым.

3. Инструменты

Мы собираемся исследовать модели теорий, поэтому нам понадобятся некоторые средства работы с моделями.

Почему мы не пытались отделить структуры $\mathbb{N}_<$ и нечетные числа с порядком? Ясно, что эти структуры "одинаковы": отображение $n \to 2n+1$ взаимнооднозначно отображает $\mathbb{N}_<$ на нечетные числа сохраняя порядок и сопоставляя минимальному элементу (значению константы 0) минимальный элемент, поэтому очевидно, что в этих структурах выполнены одни и те же утверждения.

Пусть даны две структуры $M_1 = \langle D_1, \Sigma, \mathbf{Зн}_1\rangle$ и $M_2 = \langle D_2, \Sigma, \mathbf{Зн}_2\rangle$ и взаимнооднозначное отображение ψ: D_1 на D_2. Это отображение называется *изоморфизмом* структур (а структуры называются *изоморфными*), если для каждого имени $(k+1)$-местного отношения P, входящего в сигнатуру Σ, для любых $a_0, \dots, a_k \in D_1$

$$\mathbf{Зн}_1(P)(a_0, \dots, a_k) \Leftrightarrow \mathbf{Зн}_2(P)(\psi(a_0), \dots, \psi(a_k))$$

и для каждого имени константы c, входящего в сигнатуру Σ,

$$\psi(\mathbf{Зн}_1(c)) = \mathbf{Зн}_2(c).$$

Изоморфизм структур $\mathbb{N}_<$ и нечетных чисел с порядком очевиден, но почему мы не пытались отделить $\mathbb{Q}_<$ и положительные рациональные числа?

Задача. Доказать, что любые две счетные модели теории Γ_Q изоморфны.
Решение. Лемма. Пусть M_1 и M_2 – модели теории Γ_Q и $\psi\colon\ M_1 \to M_2$ такое отображение, что (1) область определения ψ конечна (2) $\psi(a) < \psi(b) \Leftrightarrow a < b$ (ψ является *частичным изоморфизмом*). Тогда для любого $c \in M_1$ можно найти такое $d \in M_2$, что $a < c \Leftrightarrow \psi(a) < d$ (добавив $\psi(c) = d$ мы можем продолжить частичный изоморфизм ψ на c).

Доказательство. Пусть $a_0 < \cdots < a_n$ – область определения отображения ψ. Если (1) $c < a_0$, то в качестве d возьмем любой элемент, меньший $\psi(a_0)$ (Γ_Q гарантирует, что в структуре нет наименьшего элемента), (2) $c > a_n$, то в качестве d возьмем любой элемент, больший $\psi(a_n)$ (Γ_Q гарантирует, что в структуре нет наибольшего элемента), (3) $a_i < c < a_{i+1}$, то в качестве d возьмем любой элемент $\psi(a_i) < d < \psi(a_{i+1}$ (Γ_Q гарантирует, что в структуре между любыми двумя элементами есть промежуточный). □

Теперь построим изоморфизм между счетными моделями M_1 и M_2 теории Γ_Q. Пусть $a_0, a_1, \ldots$ – элементы $M_1, b_0, b_1, \ldots$ – элементы M_2. Шаг за шагом будем строить цепочку $\psi_0 \subset \psi_1 \subset \ldots$ таких отображений структуры M_1 в M_2, что (1) область определения ψ_i конечна и (2) $\psi_i(a) < \psi_i(b) \Leftrightarrow a < b$ и (3) ψ_{i+1} является продолжением ψ_i.

Шаг 0. $\psi(a_0) = b_0, \psi_0$ определено только на a_0.

Шаг k. $k > 0$, отображение ψ_{k-1} определено.
$k = 2i$. Если ψ_{k-1} определено на a_i, то $\psi_k = \psi_{k-1}$. В противном случае ψ_k – продолжение ψ_{k-1} на a_i (используем лемму).
$k = 2i + 1$. Если ψ_{k-1}^{-1} определено на b_i, то $\psi_k = \psi_{k-1}$. В противном случае ψ_k – такое продолжение ψ_{k-1}, что ψ_k^{-1} определено на b_i (используем лемму для ψ_k^{-1} с заменой M_1 на M_2).

Отображение $\bigcup \psi_i$ является изоморфизмом: на четных шагах мы заботились о том, чтобы оно было всюду определено, на нечетных – чтобы это было отображение "на".

Такой метод построения отображений называется "челночный метод". **Конец решения.**

Задача. При чём здесь челнок?

Задача. Бывают ли модели теории Γ_Q, равномощные $\mathbb{R}$, но не изоморфные $\mathbb{R}_<$?

Важным частным случаем изоморфизмов являются автоморфизмы: в частности группы автоморфизмов структур тесно связана с многообразием определимых отношений в структурах.

Изоморфные структуры, конечно, неотличимы, но, поскольку нас в основном интересует истинность формул в структурах, нам важно и "более грубое" отношение сходства структур.

Если M – структура, то символом Th_M мы обозначаем *теорию структуры* M – множество утверждений, истинных в структуре M.

Мы скажем, что структуры M_1 и M_2 *элементарно эквивалентны* (или просто *эквивалентны*), если $\mathrm{Th}_{M_1} = \mathrm{Th}_{M_2}$.

Задача.Почему изоморфные структуры эквивалентны?
Конечно, правильный ответ: "очевидно". Но из педантизма индукцией по построению формулы Φ можно доказать, что

$$M_1 \models \Phi(\bar{a}) \Leftrightarrow M_2 \models \Phi(\bar{\psi}(\bar{a}))$$

Доказательство рутинное, рассмотрим, например, случай $\Phi(\bar{x}) = (\exists u \Psi(\bar{x}, u))$ и $\Rightarrow$.
$M_1 \models \Phi(\bar{a}) \Rightarrow (M_1 \models \Psi(\bar{a}, b)$ для некоторого $b \in M_1) \Rightarrow$ (индукция) $M_2 \models \Psi(\bar{\psi}(\bar{a}), \psi(b)) \Rightarrow$ $M_1 \models \Phi(\bar{\psi}(\bar{a}))$

Задача. Бывают ли эквивалентные неизоморфные структуры?

Пусть $M = \langle D, \Sigma, \mathbf{Зн} \rangle$ – некоторая структура, а D_1 – подмножество области (носителя) D, содержащее значения всех констант. Тогда *подструктура* $M_1 = \langle D_1, \Sigma, \mathbf{Зн}_1 \rangle$ определяется естественным образом: отображение $\mathbf{Зн}_1$ является ограничением $\mathbf{Зн}$ на D_1. В общем случае теории Th_M и Th_{M_1} имеют мало общего, поэтому особый интерес представляют элементарные подструктуры.

Подструктура M_1 структуры M называется *элементарной*, если $M \models \Phi(\bar{a}) \Leftrightarrow M_1 \models \Phi(\bar{a})$ для любой формулы Φ в сигнатуре Σ и любых элементов $\bar{a} \in M_1$. В этом случае структура M называется *элементарным расширением* структуры M_1.

Если M_1 – элементарная подструктура структуры M, то M и M_1, конечно, эквивалентны.

Задача. Бывают ли такие структуры M и M_1, что (1) M_1 – подструктура M, и (2) M_1 эквивалентно M, но (3) M_1 не является элементарной подструктурой M?

Следующий критерий позволяет определить, когда подструктура элементарна.

Критерий Тарского – Воота.
Пусть M_1 – подструктура структуры M. Следующие два условия равносильны:
(1) M_1 – элементарная подструктура структуры M
(2) для любой формулы $\Phi(\bar{x}, y)$ и любых элементов $\bar{a} \in M_1$ если
$M \models \Phi(\bar{a}, b)$ для некоторого $b \in M$, то
$M \models \Phi(\bar{a}, b')$ для некоторого $b' \in M_1$.

Доказательство.
$(1) \Rightarrow (2)$.
Очевидно: $M \models \Phi(\bar{a}, b)$ для некоторого $b \in M \Rightarrow M \models (\exists u \Phi(\bar{a}, u)) \Rightarrow$(элементарная подструктура) $M_1 \models (\exists u \Phi(\bar{a}, u)) \Rightarrow M_1 \models \Phi(\bar{a}, b')$ для некоторого $b' \in M_1 \Rightarrow$(элементарное расширение) $M \models \Phi(\bar{a}, b')$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Индукцией по построению формулы Φ покажем, что

$$M_1 \models \Phi(\bar{a}) \iff M \models \Phi(\bar{a})$$

для любой формулы Φ и для любых $\bar{a} \in M_1$.

Мы разберем единственный нетривиальный случай: $\Phi = (\exists u \Psi(\bar{x}, u))$.
Все остальные случаи: атомной формулы, $\Phi = \neg\Psi, \Phi = \Psi_1 \vee \Psi_2, \Phi = \Psi_1 \wedge \Psi_2, \Phi = \Psi_1 \to \Psi_2, \Phi = \Psi_1 \equiv \Psi_2, \Phi = (\forall u \Psi)$ разберите, пожалуйста, самостоятельно.

$\Rightarrow$. Пусть $M_1 \vDash (\exists u \Psi(\bar{a}, u))$. Тогда $M_1 \vDash \Psi(\bar{a}, b')$ для некоторого $b' \in M_1 \Rightarrow$(индукция) $M \vDash \Psi(\bar{a}, b') \Rightarrow M \vDash (\exists u \Psi(\bar{a}, u))$ (мы не использовали условий критерия).

$\Leftarrow$. Пусть $M \vDash (\exists u \Psi(\bar{a}, u))$. Тогда $M \vDash \Psi(\bar{a}, b)$ для некоторого $b \in M \Rightarrow$(критерий) $M \vDash \Psi(\bar{a}, b')$ для некоторого $b' \in M_1 \Rightarrow$(индукция) $M_1 \vDash \Psi(\bar{a}, b') \Rightarrow M_1 \vDash (\exists u \Psi(\bar{a}, u))$. $\square$

Мы используем данный критерий для доказательства теоремы Лёвенгейма – Сколема.

Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарной подмодели. *Любая беконечная структура с конечной или счетной сигнатурой содержит счетную элементарную подструктуру.*

Доказательство. Построим счётную цепочку $M_0 \subset M_1 \subset \ldots$ счётных подструктур бесконечной структуры M.

Подструктура M_0 — произвольная счётная подструктура структуры M, содержащая все элементы, соответствующие именам констант.

Пусть M_i уже построено. Для каждой формулы $\Phi(\bar{x}, y)$ и для всех $\bar{a} \in M_i$, если $M \vDash \Phi(\bar{a}, b)$ для некоторого $b \in M$, мы добавляем в M_{i+1} один из таких элементов.

Мы утверждаем, что подструктура $M' = \bigcup M_i$ является искомой. Подструктура M' счётна, поскольку на каждом шагу мы добавляли не более чем счетное число элементов.

Элементарность подструктуры следует из критерия. Пусть $M \vDash \Phi(\bar{a}, b), \bar{a} \in M'$ для некоторого $b \in M$, мы должны показать, что $M \vDash \Phi(\bar{a}, b')$ для некоторого $b' \in M$.

Поскольку набор $\bar{a}$ конечен, то $\bar{a} \in M_i$ для некоторого i. Тогда, при построении подструктуры M_{i+1}, мы рассматривали формулу $\Phi(\bar{x}, y)$ и набор $\bar{a}$. Поскольку $M \vDash \Phi(\bar{a}, b)$, то в M_{i+1} будет включен один из таких элементов. $\square$

Одним из основных инструментов построения моделей является

Теорема компактности. *Если любое конечное подмножество теории непротиворечиво, то теория непротиворечива.*

Задача. Как доказать теорему компактности?

Теорема компактности для логики отношений будет доказана позже.

Важное следствие:

Следствие. *Если некоторая замкнутая формула является следствием теории, то эта формула является следствием некоторого конечного подмножества данной теории.*

Задача. Как вывести следствие из теоремы компактности?

Теория Γ называется *полной*, если $\Gamma \models \Phi$ или $\Gamma \models \neg\Phi$ для любой замкнутой формулы Φ.

Полную теорию Γ по-существу нельзя усилить: если к ней добавить какое-то утверждение Φ, то или Φ уже было истинно на всех моделях теории Γ, или теория станет противоречивой – у нее не будет ни одной модели.

Иными словами, теория полна тогда и только тогда, когда две любые модели теории эквивалентны.

Задача. Любую ли непротиворечивую теорию Γ можно расширить до полной теории? Да, конечно. Пусть M – модель теории Γ. Рассмотрим Th_M (все утверждения, истинные в структуре M) – эта теория является полным расширением теории Γ.

Задача. Являются ли теории Γ_Q, Γ_N полными?

4. Плотный порядок без первого и последнего элементов

Утверждение. Теория Γ_Q полна.

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 – две не эквивалентные модели теории Γ_Q. Поскольку все модели данной теории бесконечны, то, по тереме Лёвенгейма – Сколема, можно считать, что M_1 и M_2 счетны. Тогда они, как мы заметили раньше, изоморфны, поэтому эквивалентны. Противоречие. $\square$

Теория *категорична* в счётной мощности — все счетные модели изоморфны.

Доказывая полноту Γ_Q мы фактически доказали

Признак Лося – Воота. *Непротиворечивая теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей и категоричная в счётной мощности, полна.*

Имеет место и обобщение этого признака на несчетные модели:

Пусть у непротиворечивой теории Γ с конечной или счётной сигнатурой, все модели бесконечны и для некоторой модели M, все модели, равномощные M, изоморфны M. Тогда теория Γ полна.

Мы, однако, не будем доказывать признак Лося – Воота в общем виде, а вернемся к рассмотрению теории Γ_N.

Однако прежде подведем итоги исследованию теории Γ_Q: теория полна, то есть все ее модели эквивалентны (в частности, отделить $\mathbb{Q}_<$ и $\mathbb{R}_<$ невозможно). У теории единственная (с точностью до изоморфизма) счетная модель – $\mathbb{Q}_<$. Любая несчетная модель является элементарным расширением (единственной) счетной модели.

5. Дискретный линейный порядок с наименьшим элементом

В данном случае признак Лося – Воота не применим: мы знаем, что у теории Γ_N есть как минимум две неизоморфные счетные модели: $\mathbb{N}_<$ и $\mathbb{N}_< + \mathbb{Z}_<$.

Задача. Докажите, что структуры $\mathbb{N}_<$ и $\mathbb{N}_< + \mathbb{Z}_<$ не изоморфны.

Пусть M – произвольная модель теории Γ_N, a, b – некоторые элементы M. Мы скажем, что элементы a, b структуры M *близки*, если между a и b находится лишь конечное число элементов. Более формально: элементы $a \leqslant b$ $(b \leqslant a)$ близки, если множество $c \in M, a \leqslant c \leqslant b$ $(b \leqslant c \leqslant a)$ конечно. Множество элементов, близких к элементу a, мы будем обозначать $\tilde{a}$ и называть *галактикой*.

Задача. Докажите, что структура M разбивается на множество непересекающихся галактик (классов эквивалентности отношения близости).

Задача. Как устроена галактика $\tilde{0}$? Как устроены все прочие галактики?
Галактика $\tilde{0}$ изморфна $\mathbb{N}_<$, любая другая галактика изоморфна $\mathbb{Z}_<$.

Мы определим порядок на галактиках так, что $\tilde{a} < \tilde{b}$ если $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ и $a < b$.

Задача. Корректно ли определен порядок (зависит ли отношение порядка между галактиками от того, какой именно элемент выбран в галактике)? Будет ли порядок на галактиках линейным? Есть ли среди галактик наименьшая?

Рассмотрим структуру $\mathbb{N} = \langle N, \{0, 1, 2, \ldots, <, +, \times\}, \mathbf{Зн}_0 \rangle$ — натуральный ряд с естественным соответствием $\mathbf{Зн}_0$.

Техническое замечание. До сих пор мы рассматривали сигнатуры, в которых встречались символы констант и отношений, в данной сигнатуре у нас встречаются символы функций – $+, \times$. Это обобщение является чисто технической проблемой. Есть два способа решить эту проблему.

Во-первых, можно, конечно, обобщить понятие интерпретации, включив в него сопоставление функциональным символам функций соответствующей арности на области (носителе) структуры. Все сформулированные ранее утверждения сохранятся.

Во-вторых, можно каждому функциональному символу от n переменных сопоставить символ соответствующего отношения от $n+1$ переменных (так, в частности, символу $+$ сопоставим символ $R_+(x, y, z)$, символу $\times$ – $R_\times(x, y, z)$, причем интерпретируются они так, что $R_+(n_1, n_2, n_3) \Leftrightarrow n_1 + n_2 = n_3, R_\times(n_1, n_2, n_3) \Leftrightarrow n_1 \cdot n_2 = n_3$) и считать, что в сигнатуру входят не имена функций, а имена соответствующих отношений. В этом случае формулы станут более громоздкими, например вместо $a + b + c = d$ придется писать $(\exists u(R_+(a, b, u) \wedge R_+(u, c, d)))$ но по-существу ничего не изменится. *Конец технического замечания.*

Пусть c — новое имя константы, рассмотрим теорию $\mathrm{Th}_\mathbb{N} \cup \{c \neq i \mid i \in N\}$. По теореме компактности данная теория непротиворечива.

Задача. Почему каждое конечное подмножество данной теории имеет модель?
Конечное подмножество содержит, в частности, лишь конечное множество утверждений $c \neq n_0, \ldots, c \neq n_k$, где $n_0, \ldots, n_k$ – натуральные числа. Поэтому моделью для такого подмножества является обычный натуральный ряд, причем константе c можно сопоставить любое натуральное число, не равное $n_0, \ldots, n_k$.

Пусть $\mathbb{N}^*$ – некоторая счетная модель данной теории (раз бесконечная модель данной теории существует, то, по тереме Лёвенгейма – Сколема, имеется и счетная модель). Такие структуры называются *нестандартными арифметиками*, они устроены чрезвычайно сложно и их рассмотрение выходит за рамки нашего курса.

В данном случае нас интересует в основном порядок на структуре $\mathbb{N}^*$ – обозначим через $\mathbb{N}^*_<$ структуру, полученную из $\mathbb{N}^*$ удалением всех отношений, кроме $<$ и константы 0: носители структур $\mathbb{N}^*$ и $\mathbb{N}^*_<$ совпадают, сигнатура структуры $\mathbb{N}^*_<$ – это $\{<, 0\}$, интерпретации символов < и 0 в структурах $\mathbb{N}^*$ и $\mathbb{N}^*_<$ совпадают.

Поскольку каждое натуральное число является значением соответствующей константы из $\mathrm{Th}_{\mathbb{N}}$, то $\mathbb{N}^*_<$ является, по-существу, элементарным расширением $\mathbb{N}_<$ и, тем более, моделью теории Γ_N.

Задача. Структура $\mathbb{N}^*_<$ зависит от выбора модели $\mathbb{N}^*$. Может ли структура $\mathbb{N}^*_<$ оказаться изоморфной $\mathbb{N}_<$?